

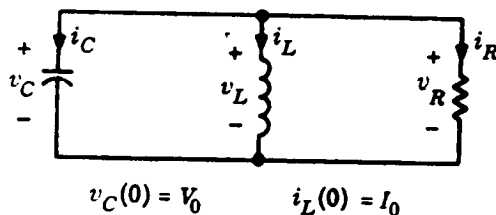
فصل پنجم

مدارهای مرتبه دوم

در فصل چهارم مدارهای الکتریکی مرتبه اول را مفصلاً مطالعه کردیم و با مدارهای خطی و غیر خطی هردو مواجه شدیم. ما مدارهای خطی را مطالعه کرده و پاسخ کامل، پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر آنها را محاسبه نمودیم. همچنین ثابت کردیم که برای مدارهای خطی، پاسخ ورودی صفر، تابع خطی حالت اولیه و پاسخ حالت صفر تابع خطی ورودی است. این حقایق برای شبکه‌های خطی عمومی معتبر بوده و در فصل سیزدهم اثبات خواهند شد. در این فصل مدارهای مرتبه دوم را مطالعه خواهیم کرد. برای تشریح محاسبه پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر، از یک مدار ساده موازی RLC (مقاومت - سلف - خازن) استفاده خواهیم کرد. همچنین با روش جدیدی برای توصیف یک مدار بنام روش فضای حالت^(۱) مواجه خواهیم شد. این روش را نه تنها در مدارهای خطی، بلکه در مدارهای غیر خطی نیز بکار خواهیم برد.

۱- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان، پاسخ ورودی صفر

در شکل (۱-۱) یک اتصال موازی از سه عنصر پسیو^(۲) خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم که عبارت از یک مقاومت، یک سلف و یک خازن میباشند. معادلات شاخه‌های آنها چنین است،



شکل ۱-۱- مدار RLC موازی، هر سه جزء خطی، تغییر ناپذیر با زمان و پسیو هستند

$$i_R = Gv_R \quad \text{یا} \quad v_R = Ri_R \quad (۱-۱) \text{ الف}$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_L(0) = I_0 \quad \text{یا} \quad i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t') dt' \quad (۱-۱) \text{ ب}$$

$$v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt' \quad \text{یا} \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad v_C(0) = V_0 \quad (۱-۱) \text{ پ}$$

که در آن C, L, G, R مقادیر «مثبت» بوده و بترتیب نمایشگر مقاومت، رسانایی، اندوکتانس و ظرفیت میباشند. I_0 نشان دهنده جریان اولیه در داخل سلف و V_0 نمایشگر ولتاژ اولیه در دوسرخازن است. $i_C, i_L, i_R, v_C, v_L, v_R$ شش متغیر شبکه میباشند. از KVL داریم:

$$v_C = v_R = v_L \quad (۱-۲)$$

و از KCL داریم:

$$i_C + i_R + i_L = 0 \quad (۱-۳)$$

رویه‌مرفته شش معادله داریم، سه معادله در (۱-۱)، دو معادله در (۱-۲) و یک معادله در (۱-۳). بنابراین میتوان انتظار داشت که شش متغیر مجهول شبکه را بتوان بطور یکتا تعیین نمود. در حقیقت توسعه درسی ما نشان خواهد داد که آنها واقعاً بطور یکتا تعیین میشوند.

مسئله مورد نظر اینست که مناسب‌ترین متغیر را انتخاب کرده و راحت‌ترین معادله را برحسب آن متغیر بنویسیم و برحسب آن متغیر حل کنیم، و سپس پنج متغیر باقی‌مانده را محاسبه نماییم. یک راه حل مسئله اینست که ولتاژ خازن v_C را بعنوان مناسب‌ترین متغیر انتخاب کنیم. با استفاده از معادلات (۱-۱) تا (۱-۳)، معادله انتگرال-دیفرانسیل^(۱) زیر را برحسب متغیر v_C بدست می‌آوریم:

$$(۱-۴) \quad C \frac{dv_C}{dt} + Gv_C + I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v_C(t') dt' = 0$$

و :

$$(۱-۵) \quad v_C(0) = V_0$$

هرگاه ولتاژ v_C بدست آید ، پنج متغیر دیگر شبکه را میتوان از معادلات (۱-۱) و (۱-۲) بدست آورد . راه حل دیگر مسأله اینست که جریان سلف i_L بعنوان متغیر انتخاب شود . اگر معادلات شاخه را برای خازن و مقاومت بکار بریم ، از معادله (۱-۳) بدست میاوریم :

$$C \frac{dv_C}{dt} + Gv_R + i_L = 0$$

چون در (۱-۲) ، $v_C = v_R = v_L$ است ، معادله بالا باینصورت درمیآید :

$$(۱-۶) \quad C \frac{dv_L}{dt} + Gv_L + i_L = 0$$

حال معادله شاخه درمورد سلف را بکار میبریم تا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر که در آن i_L بعنوان متغیر وابسته است بدست آید :

$$(۱-۷) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

شرایط اولیه لازم چنین است :

$$(۱-۸) \quad i_L(0) = I_0$$

و :

$$(۱-۹) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0)}{L} = \frac{V_0}{L}$$

معادله دیفرانسیل (۱-۷) با شرایط اولیه (۱-۸) و (۱-۹) دارای جواب منحصر بفرد i_L است . هرگاه جریان i_L بدست آید ، میتوان پنج متغیر دیگر شبکه را از معادلات (۱-۱) و (۱-۲) بدست آورد . گیریم برای حل i_L از معادلات (۱-۷) تا (۱-۹) شروع کنیم . چون

هیچ منبعی مدار را تحریک نمیکند، پاسخ i_L ، «پاسخ ورودی صفر» است. برای راحتی عملیات، فرض کنید دو پارامتر α و ω_0 بصورت زیر تعریف شوند:

$$(1-10) \quad \alpha \triangleq \frac{G}{2C} \quad \omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

پارامتر α ثابت میرایی^(۱) و پارامتر ω_0 (برحسب رادیان برثانیه) فرکانس (زاویه‌ای) تشدید^(۲) نامیده میشود. $\omega_0 = 2\pi f_0$ است که در آن f_0 (برحسب هرتز) فرکانس تشدید سلف و خازن است. دو پارامتر α و ω_0 رفتار مدار RLC را مشخص میکنند. با تقسیم معادله (۱-۷) به LC بدست میاید:

$$(1-11) \quad \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0}$$

این یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت است. «چند جمله‌ای مشخصه» این معادله دیفرانسیل چنین است:

$$(1-12) \quad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

صفرهای چند جمله‌ای مشخصه، ریشه‌های مشخصه و یا عبارت بهتر «فرکانس‌های طبیعی مدار» نامیده میشوند. این ریشه‌ها عبارتند از:

$$(1-13) \quad \left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha + \alpha_d \\ -\alpha - \alpha_d \end{cases} \quad \text{که در آن:}$$

$$\alpha_d \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

شکل پاسخ ورودی صفر مدار به مقادیر نسبی α و ω_0 بستگی دارد. برحسب مقادیر نسبی α و ω_0 میتوان پاسخ ورودی صفر را به چهار حالت طبقه بندی کرد:

میرای شدید^(۱)، میرای بحرانی^(۲)، میرای ضعیف^(۳) و بی اتلاف^(۴). سه حالت اول، شکل موجهای $i_L(0)$ را که بصورت نمایی میرا هستند بوجود آورده درحالیکه حالت آخری متناظر با یک شکل موج سینوسی است.

۱- میرای شدید ($\alpha > \omega_0$). فرکانسهای طبیعی s_1 و s_2 هردو «حقیقی و منفی» هستند و پاسخ، مجموع دو تابع نمایی میرا است:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad (1-14)$$

که در آن ثابتهای k_1 و k_2 به شرایط اولیه بستگی دارند.

۲- میرای بحرانی ($\alpha = \omega_0$). دو فرکانس طبیعی مساوی و حقیقی میباشند، یعنی $s_1 = s_2 = -\alpha$ پاسخ چنین است:

$$i_L(t) = (k + k' t) e^{-\alpha t} \quad (1-15)$$

که در آن ثابتهای k و k' به شرایط اولیه بستگی دارند.

۳- میرای ضعیف ($\alpha < \omega_0$). دو فرکانس طبیعی مزدوج مختلط^(۵) هستند $s_1 = -\alpha + j\omega_d$ و $s_2 = -\alpha - j\omega_d$ که در آن $\omega_d^2 \triangleq \omega_0^2 - \alpha^2$. پاسخ باین شکل است:

$$i_L(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad (1-16)$$

که در آن k و θ ثابتهای حقیقی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند. یک نمونه از شکل موج $i_L(0)$ در شکل (۱-۲) نشان داده شده است که در آن منحنیهای نمایی کم رنگ، منحنیهای پوش^(۶) نامیده میشوند. توجه کنید که دامنه نوکهای^(۷) شکل موج طبق پوشهای نمایی میرا کاهش مییابند.

۴- بی اتلاف ($\alpha = 0$) و بنابراین ($G = 0$). هردو فرکانس طبیعی انگاری^(۸) هستند ($s_1 = j\omega_0$ ، $s_2 = -j\omega_0$). پاسخ چنین است:

۱- Overdamped

۲- Critically damped

۳- Underdamped

۴- Lossless

۵- Complex Conjugate

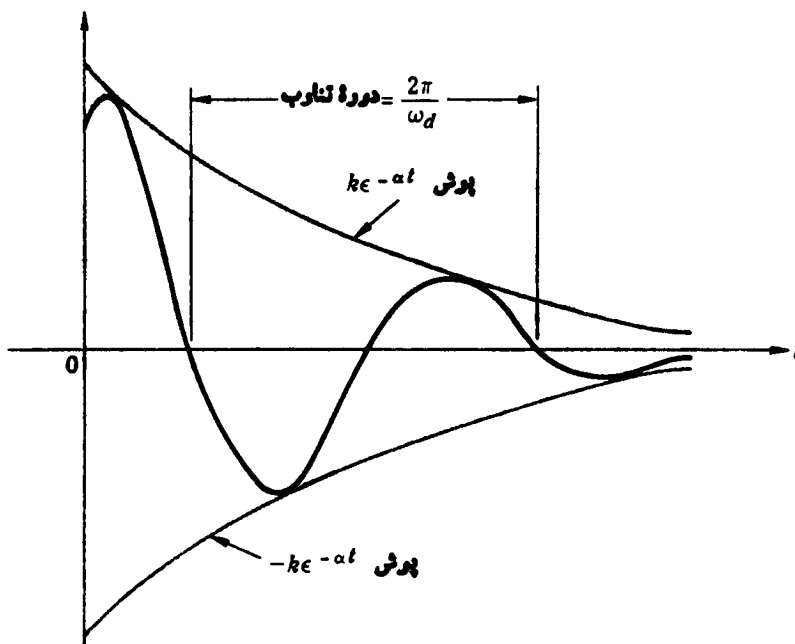
۶- Envelope

۷- Peak

۸- Imaginary

$$i_L(t) = k \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (1-17)$$

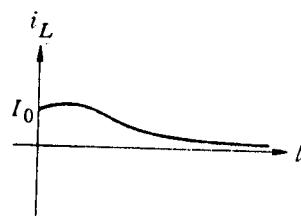
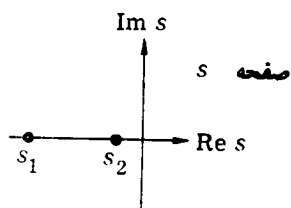
که در آن k و θ ثابت‌های حقیقی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند.



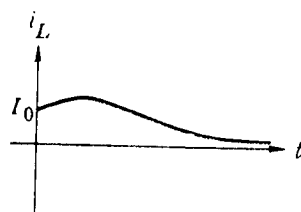
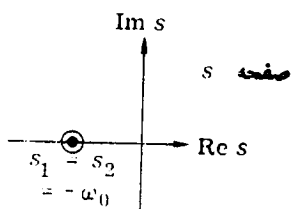
شکل ۲-۹- شکل موج $i_L(0)$ برای حالت میرای ضعیف ($\alpha < \omega_0$) مدار RLC موازی.

میتوان براحتی با جایگزینی مستقیم نشان داد که معادلات (۱-۱۴) تا (۱-۱۷) جواب کلی معادله دیفرانسیل همگن (۱-۱۱) میباشند. در هر مورد، دو ثابت دلخواه از شرایط اولیه داده شده در معادلات (۱-۸) و (۱-۹) تعیین میشوند. محاسبه ثابت‌های دلخواه از شرایط اولیه داده شده سراسر است میباید.

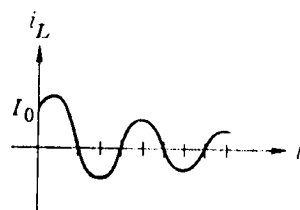
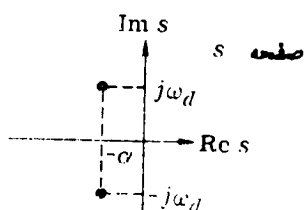
میتوان چهار حالت فوق را برحسب فرکانس‌های طبیعی، یعنی برحسب دو ریشه s_1 و s_2 معادله مشخصه معادله دیفرانسیل نیز طبقه‌بندی کرد. چون فرکانس‌های طبیعی میتوانند حقیقی، مختلط و یا انگاری باشند، نشان دادن آنها در صفحه مختلط موسوم به «صفحه فرکانس مختلط»^(۱) آموخته است. در صفحه فرکانس مختلط (صفحه s) محور افقی نمایشگر جزء حقیقی و محور عمودی نشان دهنده جزء انگاری میباشد. چهار



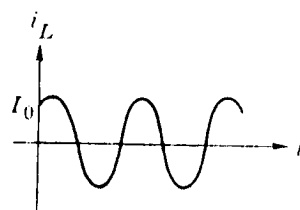
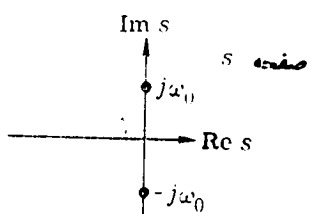
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۳-۱- پاسخ‌های ورودی صفر مدار RLC موازی که برحسب محل قرارگرفتن فرکانس‌های طبیعی درست‌چپ و شکل موجها در طرف راست طبقه‌بندی شده‌اند.

(الف) میرای شدید ($\alpha > \omega_0$) . (ب) میرای بحرانی ($\alpha = \omega_0$) .

(پ) میرای ضعیف ($\alpha < \omega_0$) . (ت) بی‌اتلاف ($\alpha = 0$) .

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

حالت در شکل (۱-۳) تشریح شده‌اند، که در آن محل فرکانس‌های طبیعی در صفحه s ، درست چپ نشان داده شده و شکل موج $i_L(0)$ متناظر در سمت راست رسم شده است. اهمیت صفحه فرکانس مختلط، وقتی که تبدیل لاپلاس^(۱) در فصل سیزدهم معرفی می‌شود روشن‌تر خواهد شد. معه‌ذا اکنون بایستی تشخیص داد که محل فرکانس‌های طبیعی در صفحه فرکانس مختلط شکل پاسخ را تعیین می‌کند.

تمرین - جواب معادله دیفرانسیل همگن (۱-۱۱) برای حالت میرای ضعیف را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

که در آن s_1 ، s_2 ، k_1 و k_2 اعداد مختلط هستند و:

$$s_2 = \overline{s_1} = -\alpha - j\omega_d \quad k_2 = \overline{k_1}$$

تیره‌های (۲) بالای حروف نمایشگر مزدوج مختلط می‌باشند. معادله (۱-۱۶) را از این جواب بدست آورید و نشان دهید که:

$$k = 2|k_1| \quad \text{و} \quad \theta = \angle k_1$$

«محاسبه ثابت‌های دلخواه» - فرض کنید حالت میرای شدید را در نظر بگیریم.

جریان i_L بوسیله معادله (۱-۱۴) باینصورت داده می‌شود:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

می‌خواهیم ثابت‌های k_1 و k_2 را از شرایط اولیه مشخص شده در معادلات (۱-۸) و (۱-۹) تعیین کنیم. با محاسبه $i_L(t)$ در (۱-۱۴) در لحظه $t=0$ بدست می‌آوریم:

$$(1-18) \quad i_L(0) = k_1 + k_2 = I_0$$

با مشتق‌گیری از (۱-۱۴) و محاسبه مشتق در لحظه $t=0$ ، بدست می‌آوریم:

$$(1-19) \quad \frac{di_L(t)}{dt} (0) = k_1 s_1 + k_2 s_2 = \frac{V_0}{L}$$

اگر معادلات (۱-۱۸) و (۱-۱۹) را برحسب k_1 و k_2 حل کنیم بدست میآوریم :

$$(۱-۲۰) \quad k_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 I_0 \right)$$

و :

$$(۱-۲۱) \quad k_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 I_0 \right)$$

با جایگذاری k_1 و k_2 در (۱-۱۴)، یک عبارت کلی برای شکل موج جریان $i_L(0)$ برحسب «حالت اولیه» مدار، یعنی جریان اولیه I_0 در سلف و ولتاژ اولیه V_0 در دوسر خازن بدست میآوریم. بنابراین :

$$(۱-۲۲)$$

$$i_L(t) = \frac{V_0}{(s_1 - s_2)L} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t})$$

ولتاژ v_C دو سر خازن را میتوان از روی i_L حساب کرد زیرا $v_C = v_L$ و $v_L = L \frac{di_L}{dt}$ ، بنابراین :

$$(۱-۲۳) \quad v_C(t) = \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{LI_0 s_1 s_2}{s_1 - s_2} (e^{s_2 t} - e^{s_1 t})$$

بطریق مشابه ، میتوان برای حالت میرای ضعیف ، جریان سلف و ولتاژ خازن را بصورت زیر بدست آورد :

$$(۱-۲۴) \quad i_L(t) = \frac{V_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + I_0 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

$$(۱-۲۵) \quad v_C(t) = V_0 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - \frac{L\omega_d^2}{\omega_d} I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

تمرین ۱- فرمولهای (۱-۲۴) و (۱-۲۵) را ثابت کنید.

تمرین ۲- ثابت کنید که برای حالت بی اتلاف ، جریان سلف و ولتاژ خازن بصورت زیر داده میشوند :

$$(۱-۲۶) \quad i_L(t) = \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t$$

$$(۱-۲۷) \quad v_C(t) = V_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 L I_0 \sin \omega_0 t$$

تمرین ۳- اگر $I_0 = ۱$ آمپر و $V_0 = ۱$ ولت باشد، برای هریک از مدارهای RLC موازی زیر پاسخ‌های حالت صفر را تعیین و شکل موجهای $i_L(0)$ و $v_C(0)$ آنها را نسبت به t رسم کنید:

الف - $R = ۱$ اهم ، $L = ۱$ هانری و $C = ۱$ فاراد

ب - $R = ۱$ اهم ، $L = ۴$ هانری و $C = \frac{1}{4}$ فاراد

پ - $R = \infty$ ، $L = ۴$ هانری و $C = ۱$ فاراد

بایستی بخاطر داشت که حالت بی‌اتلاف در واقع یک حالت حدی، حالت میرای ضعیف است و اگر R بسمت بینهایت میل کند، $(\alpha = 0)$ ، نوسان میرا تبدیل به نوسان سینوسی با فرکانس زاویه‌یی ω_0 میگردد.

«انرژی و ضریب Q » - بخاطر بیاورید که حالت اولیه بوسیله جریان اولیه I_0 در سلف و ولتاژ اولیه V_0 دوسر خازن در لحظه $t=0$ داده میشود. بنابراین، انرژی ذخیره شده اولیه مساوی مجموع $\frac{1}{2} L I_0^2$ (در میدان مغناطیسی) و $\frac{1}{2} C V_0^2$ (در میدان الکتریکی) میباشد. فرض کنید حالت میرای ضعیف را در نظر بگیریم. با گذشت زمان انرژی از خازن به سلف و از سلف به خازن انتقال می‌یابد و ضمن این نوسان، قسمتی از این انرژی بصورت حرارت در مقاومت تلف میشود. بنابراین انرژی کلی که در میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی باقی میماند بتدریج از بین میرود. برای $R = \infty$ ، جریان داخل مقاومت همیشه صفر بوده و هیچ اتلاف انرژی وجود ندارد و بنابراین یک نوسان مداوم^(۱) خواهیم داشت.

توجه کنید که پارامتر ω_0 به فرکانس نوسان میرا، $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ، ارتباط

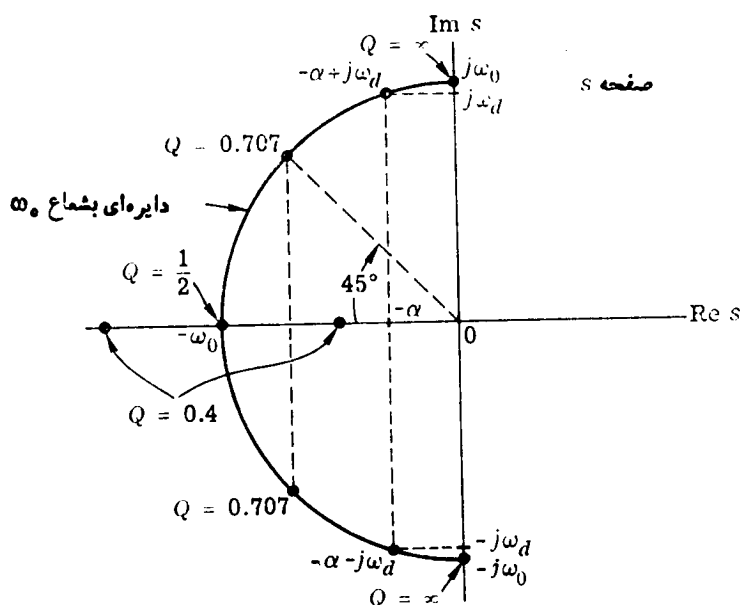
دارد ، درحالیکه پارامتر α شدت میرایی نمایی را تعیین میکند . میرایی نسبی دریک نوسان میرا اغلب بوسیله یک عدد Q که بصورت زیر تعریف میشود مشخص میگردد :

$$(۱-۲۸) \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

میتوان Q را بعنوان «ضریب کیفیت»^(۱) یک مدار تشدید فیزیکی در نظر گرفت . هر قدر میرایی کمتر باشد Q بزرگتر خواهد بود . توجه کنید که در مدار RLC موازی ، برای «کاهش» میرایی لازم است که مقاومت را «افزایش» دهیم . یک مدار تشدید بی اتلاف دارای میرایی صفر یا Q بینهایت میباشد . در فصل هفتم نشان خواهیم داد که میتوان Q را به نسبت انرژی ذخیره شده و توان تلف شده در هر سیکلی ارتباط داد . چهار حالتی را که مطالعه کردیم میتوان برحسب مقدار Q نیز طبقه بندی نمود . در حالت میرای شدید ، $Q < \frac{1}{2}$ ، در حالت میرای بحرانی ، $Q = \frac{1}{2}$ ، در حالت میرای ضعیف ، $Q > \frac{1}{2}$ و در حالت بی اتلاف $Q = \infty$ است . در شکل (۱-۴) مقادیر Q به محل های فرکانس های طبیعی در چهار حالت ارتباط داده شده اند .

حالت بی اتلاف ($\alpha=0$ ، $R=\infty$ و $Q=\infty$) یک حالت ایده ال است ، زیرا یک سلف فیزیکی همیشه دارای مقداری اتلاف میباشد . بنابراین در مدارهای «پسیو» عملی نمیتوان $Q=\infty$ ، پیدا کرد و این بدان معنی است که بدست آوردن نوسان سینوسی ، ناشی از حالت اولیه تنها در واقع غیر ممکن است . در بخش ۴ نشان خواهیم داد که اگر علاوه بر L و C دارای اتلاف ، بعضی از عناصر اکتیو نیز در مدار بکار برده شود ، یک نوسان مداوم بدست خواهد آمد .

تمرین در مدارهای فشرده عملی ، Q هایی با مقدار چندین صد قابل دسترس است . برای بدست آوردن احساسی از معنای Q فرض کنید که $Q \gg 1$ باشد . ثابت کنید که دامنه نوسان میرا ، پس از Q پریود به ۳٪ درصد مقدار اولیه خود میرسد .



شکل ۴-۱- مکان فرکانس‌های طبیعی چهار حالت. در معادله مشخصه

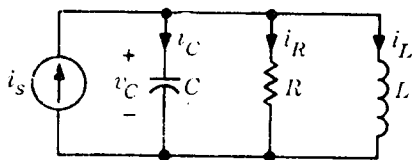
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 = 0 \quad \text{فرکانس تشدید}$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ را ثابت نگاهداشته و Q تغییر میکند. این متناظر با مداری است که L و C در آن ثابت مانده و R تغییر میکند.

۲- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان، پاسخ حالت صفر

مطالعه مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را ادامه میدهیم تا طرز محاسبه و خواص «پاسخ حالت صفر» را تشریح کنیم. بنابراین، در حالتی هستیم که در آن شرایط اولیه همه صفر بوده و ورودی بطور متحد مساوی صفر نیست. در بخش قبل ورودی بطور متحد مساوی صفر بود ولی شرایط اولیه همگی مساوی صفر نبودند.

در واقع منظور از پاسخ حالت صفر، پاسخ مدار به یک ورودی اعمال شده در یک زمان دلخواه t_0 میباشد، بشرط اینکه مدار در t_0 در حالت صفر باشد. علت اینکه بجای t_0 ، $t_0 -$ گفته میشود اینست که تأکید کنیم، شرایط اولیه (جریان داخل سلف و



شکل ۲-۱- مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

ولتاژ دو سر خازن) درست قبل از اعمال ورودی صفر میباشند .

برای مدار شکل (۲-۱) از KCL چنین بدست میاید :

$$(۲-۱) \quad i_C + i_R + i_L = i_s$$

با تکرار همان روش بخش ۱ ، معادله مدار را برحسب جریان سلف i_L بدست میاوریم، بنابراین :

$$(۲-۲) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s(t) \quad t \geq 0$$

و :

$$(۲-۳) \quad i_L(0_-) = 0$$

$$(۲-۴) \quad \frac{di_L}{dt}(0_-) = \frac{v_C(0_-)}{L} = 0$$

سه معادله فوق متناظر با معادلات (۱-۷) ، (۱-۸) و (۱-۹) بخش قبلی است . تفاوت آنها در این است که قبلاً " ورودی صفر بود و شرایط اولیه غیر صفر بودند درحالیکه اکنون تابع ورودی ، همانطور که در (۲-۲) دید، میشود $i_s(t)$ بوده و همه شرایط اولیه چنانکه در (۲-۳) و (۲-۴) داده شده است صفر هستند . بخاطر بیاورید که جواب معادله دیفرانسیل خطی نا همگن با ضرایب ثابت مجموع دو جمله است ، یعنی :

$$(۲-۵) \quad i_L = i_h + i_p$$

که در آن i_h یک جواب معادله دیفرانسیل همگن ، یعنی جواب معادله (۲-۲) با $i_s = 0$ بوده و i_p یک جواب خاص معادله دیفرانسیل نا همگن میباشد . درمسأله ما ، i_h در بخش قبل محاسبه شده است زیرا همان پاسخ ورودی صفر است و بخاطر دارید که شامل دو ثابت دلخواه میباشد . بجز حالت میرای بحرانی ، میتوان i_h را بصورت زیر نوشت :

$$(۲-۶) \quad i_h = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

البته اگر فرکانس‌های طبیعی مختلط باشند، در آن صورت:

$$(۲-۷) \quad s_2 = \overline{s_1} = -\alpha - j\omega_d \quad \text{و} \quad k_2 = \overline{k_1}$$

و میتوان i_h را بصورت زیر نیز نوشت:

$$(۲-۸) \quad i_h = 2|k_1|e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \angle k_1)$$

از طرف دیگر، i_p به ورودی بستگی دارد. چنانچه ورودی یک تابع پله باشد، راحت‌تر است که i_p بصورت یک ثابت انتخاب شود و اگر ورودی یک سینوسی باشد، راحت‌تر است که i_p بصورت یک سینوسی انتخاب گردد.

در بقیه این بخش، تنها پاسخ پله و پاسخ ضربه را حساب خواهیم کرد. محاسبه پاسخ حالت صفر برای یک ورودی سینوسی در فصل هفتم و برای ورودی‌های دلخواه در فصل ششم داده خواهد شد.

یک خاصیت مهم پاسخ حالت صفر یک مدار خطی آنست که این پاسخ تابع خطی ورودی است. ما به اثبات این مطلب نخواهیم پرداخت چونکه آن مشابه مدارهای مرتبه اول میباشد که در فصل چهارم داده شده است.

۲-۱- پاسخ پله

میخواهیم پاسخ پله مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۲-۱) را محاسبه کنیم. بموجب تعریف، ورودی یک پله واحد بوده و شرایط اولیه صفر میباشند. بنابراین از معادلات (۲-۲) تا (۲-۴) داریم:

$$(۲-۹) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = u(t)$$

$$(۲-۱۰) \quad i_L(0) = 0$$

$$(۲-۱۱) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = 0^+$$

+ چون در معادله (۲-۹) ضربه وجود ندارد، لازم نیست که بین 0_+ و 0_- تمایزی قایل شویم.

راحت‌ترین جواب خاص معادله (۲-۹) چنین است :

$$(۲-۱۲) \quad i_p(t) = 1 \quad t \geq 0 \quad \text{برای}$$

بنابراین، چنانچه فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند، جواب کلی بصورت زیر خواهد بود:

$$(۲-۱۳) \quad i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1$$

و چنانکه فرکانس‌های طبیعی مساوی هم باشند، جواب کلی باینصورت است :

$$(۲-۱۴) \quad i_L(t) = (k + k't) e^{-\alpha t} + 1$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه (۲-۱۰) و (۲-۱۱) ثابت‌های k_1 و k_2 در معادله (۲-۱۳) را تعیین میکنیم. در زمان $t=0$ از معادلات (۲-۱۰) و (۲-۱۳) نتیجه میشود :

$$(۲-۱۵) \quad i_L(0) = k_1 + k_2 + 1 = 0$$

با مشتق‌گیری از (۲-۱۳) و محاسبه مشتق در $t=0$ بدست میاید :

$$(۲-۱۶) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = k_1 s_1 + k_2 s_2 = 0$$

از حل دو معادله فوق برحسب k_1 و k_2 داریم :

$$(۲-۱۷) \quad k_1 = \frac{s_2}{s_1 - s_2} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{-s_1}{s_1 - s_2}$$

بنابراین پاسخ پله واحد چنین است :

$$(۲-۱۸) \quad i_L(t) = \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) + 1 \right] u(t)$$

فرکانس‌های طبیعی در حالت میرای ضعیف مختلط هستند، بنابراین :

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm j\omega_d$$

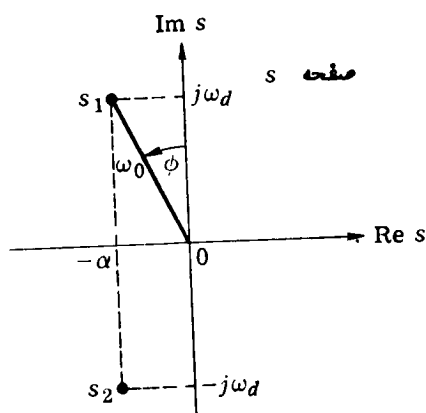
یا در مختصات قطبی^(۱) (شکل (۲-۲) را ببینید) :

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = \omega_0 e^{\pm j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}$$

که در آن :

$$(۲-۱۹) \quad |s_1| = |s_2| = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2} = \omega_0 \quad \text{و} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\omega_d}$$

جمله اول (۲-۱۸) را میتوان باینصورت بیان کرد :



شکل ۲-۲- نمایش فرکانسهای طبیعی s_1 و s_2 بر حسب مختصات قائم و قطبی، مینویسیم :

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm j\omega_d = \omega_0 e^{\pm j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \alpha^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{\alpha}{\omega_0}, \quad \cos \varphi = \frac{\omega_d}{\omega_0}, \quad \tan \varphi = \frac{\alpha}{\omega_d}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) &= \\
 &= \frac{1}{r j \omega_d} \omega_0 e^{-\alpha t} \left[e^{j\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)} - e^{-j\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)} \right] \\
 &= \frac{\omega_0}{r j \omega_d} e^{-\alpha t} r j \sin\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)
 \end{aligned}$$

$$(۲-۲۰) \quad = -\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

پاسخ پله واحد بصورت زیر درمیآید:

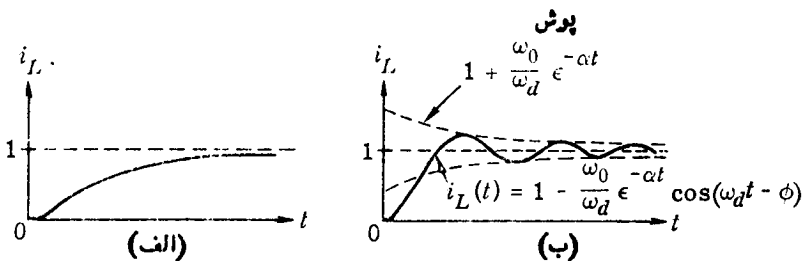
$$(۲-۲۱) \quad i_L(t) = \left[-\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + 1 \right] u(t)$$

نمونه شکل‌های پاسخ پله برای حالت‌های میرای شدید و میرای ضعیف در شکل (۲-۳) داده شده‌اند.

آموخته است که پاسخ پله را بدو قسمت تفکیک کنیم، جمله‌یی که یک نمایی میرا یا سینوسی میرا بوده و نمایشگر «حالت گذرا» است و جمله ثابت مساوی واحد که نشان دهنده «حالت دائمی» است. در هر دو حالت، جریان i_L از صفر شروع کرده و برای $t = \infty$ بمقدار واحد میرسد.

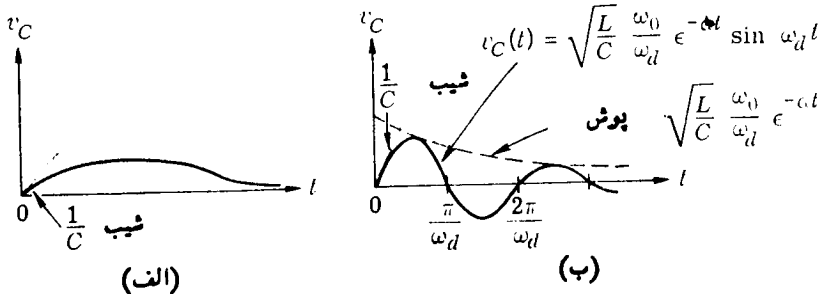
ولتاژ دوسر خازن مدار RLC موازی را میتوان با محاسبه $L \frac{di_L}{dt}$ به سہولت

حساب کرد. بنابراین:



شکل ۲-۳- پاسخی‌های پله برای جریان سلف در مدار RLC موازی.

(الف) میرای شدید. (ب) میرای ضعیف



شکل ۴-۲- پاسخهای پله برای ولتاژ خازن مدار RLC موازی

$$(۲-۲۲) \quad v_C(t) = L \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) u(t)$$

و برای حالت میرای ضعیف :

$$(۲-۲۳) \quad v_C(t) = u(t) \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

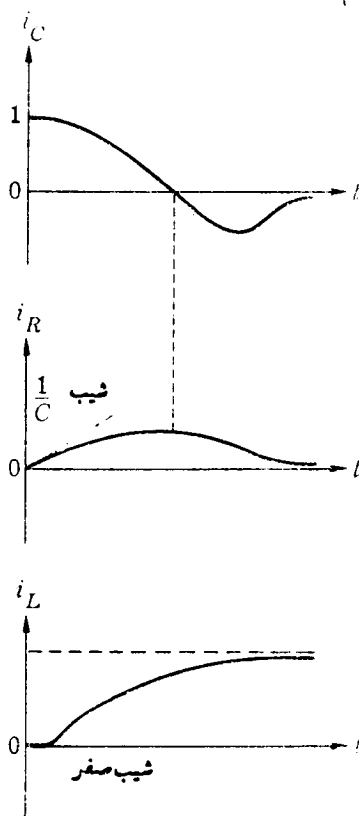
این توابع در شکل (۲-۴) رسم شده‌اند. در این مورد «حالت دائمی» بطور متحد مساوی صفر است. تمام جریان منبع سرانجام از داخل سلف میگذرد و چون این جریان ثابت است پس ولتاژ دو سر سلف بطور متحد مساوی صفر خواهد بود.

«تعبیر فیزیکی» یک منبع جریان ثابت بطور موازی بیک مدار RLC موازی که در حالت صفر قرار دارد اعمال میشود. واضح است که ولتاژ دو سر خازن و جریان داخل سلف نمیتوانند بطور ناگهانی تغییر کنند و بنابراین درست پس از اعمال ورودی، مقادیر آنها صفر است. این امر لازم میدارد که جریان داخل مقاومت نیز در ابتدا صفر باشد چونکه $v_R(0) = v_C(0) = 0$ است. بنابراین در لحظه $t=0$ «همه» جریان منبع از داخل خازن میگذرد و موجب افزایش تدریجی ولتاژ میشود. «در لحظه $t=0_+$ ، خازن در مقابل اعمال ناگهانی منبع جریان ثابت محدود، مانند یک مدار اتصال کوتاه رفتار میکند». بمرور زمان ولتاژ دو سر خازن افزایش می‌یابد و جریان در مقاومت و سلف هردو جاری میشود. پس از مدت زمان درازی مدار بیک حالت دائمی میرسد یعنی :

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0$$

و بنابراین مطابق معادله (۲-۲) تمام جریان منبع از داخل سلف میگذرد. در نتیجه، چون جریان داخل مقاومت صفر است، ولتاژ دو سر مدار موازی صفر خواهد بود. «در زمان $t = \infty$ ، سلف در مقابل یک منبع جریان ثابت مانند یک مدار اتصال کوتاه رفتار میکند.» برای حالت میرای شدید ($Q < \frac{1}{2}$)، جریانهای داخل خازن و مقاومت و سلف در شکل (۲-۵) رسم شده‌اند.

تمرین = برای یک مدار RLC موازی با $R=1$ اهم، $C=1$ فاراد و $L=1$ هانری، جریانهای داخل سلف، خازن و مقاومت را که در اثر اعمال یک ورودی جریان پله یک آمپری حاصل میشود تعیین کنید. مدار در زمان $t=0_-$ در حالت صفر است. شکل موجها را رسم کنید.



شکل ۲-۵-۲- شکلهای i_C ، i_R و i_L ناشی از یک ورودی جریان

پله برای مدار RLC موازی (حالت میرای شدید $Q < \frac{1}{2}$)

۲-۲- پاسخ ضربه

اکنون پاسخ ضربه را برای مدار RLC موازی حساب میکنیم. بموجب تعریف، ورودی یک ضربه واحد بوده و در $t=0_-$ مدار در حالت صفر می‌باشد. بنابراین پاسخ ضربه i_L ، جواب معادله دیفرانسیل زیر خواهد بود.

$$(۲-۲۴) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = \delta(t)$$

$$(۲-۲۵) \quad i_L(0_-) = 0$$

$$(۲-۲۶) \quad \frac{di_L}{dt}(0_-) = 0$$

چون محاسبه و درک فیزیکی پاسخ ضربه در تئوری مدار اهمیت بسزایی دارد، بدینجهت مجدداً چند روش محاسبه و تعبیر برای آن عرضه خواهد شد و تنها، حالت میرای ضعیف یعنی حالتی که فرکانس‌های طبیعی مدار مختلط می‌باشند در نظر گرفته خواهد شد.

«روش اول» - در این روش مستقیماً معادله دیفرانسیل را بکار می‌بریم. چون تابع ضربه $\delta(t)$ برای $t > 0$ بطور متحد برابر صفر است، پاسخ ضربه را میتوان بعنوان پاسخ ورودی صفر که در $t=0_+$ شروع میشود در نظر گرفت. ضربه وارده در $t=0$ شرط اولیه‌ای در $t=0_+$ بوجود می‌آورد و پاسخ ضربه برای $t > 0$ ، اساساً پاسخ ورودی صفر ناشی از آن شرط اولیه است. پس مسأله، تعیین این شرط اولیه می‌باشد. فرض کنید هر دو طرف معادله (۲-۲۴) را از $t=0_-$ تا $t=0_+$ انتگرال بگیریم، بدست می‌آوریم:

$$(۲-۲۷) \quad LC \frac{di_L}{dt}(0_+) - LC \frac{di_L}{dt}(0_-) + LG i_L(0_+) - LG i_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_L(t') dt' = 1$$

که در آن مقدار سمت راست، با استفاده از حقیقت زیر بدست آمده است:

$$\int_{0-}^{0+} \delta(t') dt' = 1$$

میدانیم که i_L نمیتواند در $t=0$ بجهد، عبارت دیگر، i_L یک تابع پیوسته است یعنی:

$$\int_{0-}^{0+} i_L(t') dt' = 0 \quad \text{و} \quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

زیرا اگر i_L پیوسته نبود، $\frac{di_L}{dt}$ شامل یک ضربه و $\frac{d^2 i_L}{dt^2}$ شامل یک دویلت میبود، و معادله (۲-۲۴) هرگز نمیتوانست برقرار باشد چونکه در سمت راست هیچ تابع دو بلتی وجود ندارد. از (۲-۲۷) بدست میآوریم:

$$(2-28) \quad \frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{di_L}{dt}(0_-) + \frac{1}{LC} = \frac{1}{LC}$$

تا آنجا که $t > 0$ مورد نظر است، معادله دیفرانسیل ناهمگن (۲-۲۴) با شرط اولیه داده شده در (۲-۲۵) و (۲-۲۶) معادل است با:

$$(2-29) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

با:

$$(2-30) \quad i_L(0_+) = 0$$

و:

$$(2-31) \quad \frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{1}{LC}$$

واضح است که برای $t \leq 0$ ، $i_L(t)$ صفر است. بنابراین جواب معادله بالا چنین است:

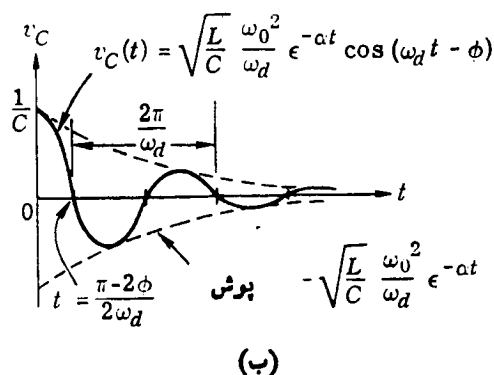
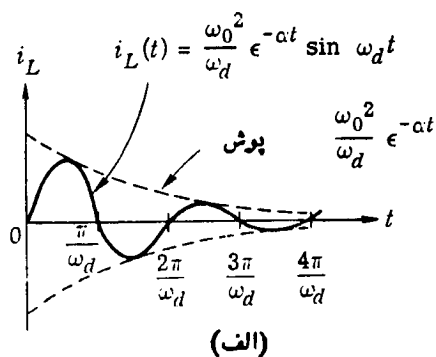
$$(2-32) \quad i_L(t) = u(t) \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

شکل موج جریان در شکل (۲-۶ الف) نشان داده شده است. توجه کنید که برای یک

حالت اولیه داده شده $I_0 = 0$ و $V_0 = \frac{1}{C}$ ، از پاسخ ورودی صفر (۱-۲۴) نیز میتوان (۲-۲۲) را بدست آورد.

تبصره اتصال موازی یک خازن و منبع جریان i_s را در نظر بگیرید. در فصل دوم نشان دادیم که این اتصال موازی، معادل با اتصال سری همان خازن و منبع ولتاژ v_s میباشد که در آنجا:

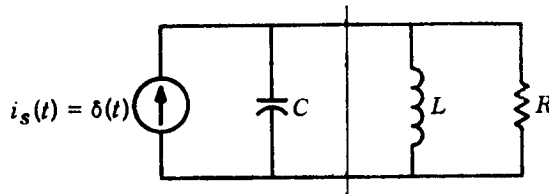
$$v_s(t) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_s(t') dt' \quad t \geq 0$$



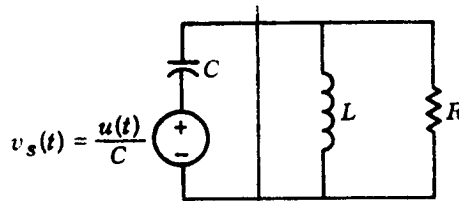
شکل ۶-۲- پاسخ ضربه مدار RLC موازی برای حالت میرای ضعیف

$$\left(Q > \frac{1}{2}\right)$$

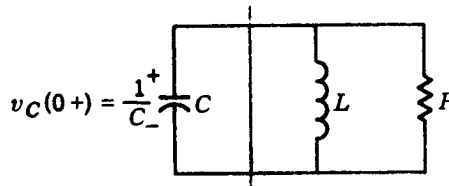
بنابراین منبع ولتاژ معادل منبع جریان ضربه ، $\frac{1}{C} u(t)$ است ، یعنی برای $t < 0$ منبع ولتاژ بطور متحد برابر صفر و برای $t > 0$ منبع ولتاژ مساوی ثابت $\frac{1}{C}$ است. اتصال سری یک خازن بی بار و منبع ولتاژ ثابت ، معادل یک خازن بار شده با ولتاژ اولیه $\frac{1}{C}$ میباشد. بنابراین پاسخ ضربه یک مدار RLC موازی ناشی از یک جریان



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۷-۲- مسأله تعیین پاسخ ضربه یک مدار RLC ، به مسأله تعیین پاسخ ورودی

صفر یک مدار RLC تبدیل میشود. توجه کنید که اتصال موازی منبع

جریان ضربه و خازن در شکل (الف) به اتصال سری خازن و یک منبع ولتاژ

پله در شکل (ب) تبدیل شده و بالاخره به خازن بار شده شکل (پ) تبدیل

گردیده است.

ضربه موازی با آن، با پاسخ ورودی صفر آن مدار با $v_C(o_+) = \frac{1}{C}$ یکسان است. این برابری‌ها در شکل (۲-۷) تشریح شده است.

«باجایگذاری مستقیم» اکنون با جایگذاری مستقیم (۲-۳۲) در معادلات (۲-۲۴) تا (۲-۲۶) ثابت میکنیم که این جواب معادله است. این عمل از لحاظ آشنایی با محاسباتی که شامل ضربه هستند تمرین با ارزشی است. واضح است که i_L داده شده توسط (۲-۳۲) شرایط اولیه (۲-۲۵) و (۲-۲۶) را برمیآورد، یعنی، $i_L(o_-) = 0$ و $\frac{di_L}{dt}(o_-) = 0$. آنچه باقی میماند این است که نشان دهیم (۲-۳۲) در معادله دیفرانسیل (۲-۲۴) صدق میکند. با مشتق‌گیری از (۲-۳۲) بدست میآید:

(۲-۳۳)

$$\frac{di_L}{dt} = \delta(t) \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right) + \frac{u(t) \omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

جمله اول بصورت $\delta(t)f(t)$ است و چون برای $t \neq 0$ ، $\delta(t)$ مساوی صفر است پس در این جمله میتوان $t=0$ قرار داد و $\delta(t)f(0)$ را بدست آورد، ولی چون $f(0)=0$ است پس جمله اول ازین میرود و داریم:

(۲-۳۴)
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{u(t) \omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

با مشتق‌گیری مجدد بدست میآوریم:

(۲-۳۵)
$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_L}{dt^2} &= \delta(t) \frac{\omega_0^2}{\omega_d} \cos \varphi - u(t) \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi) \\ &= \omega_0^2 \delta(t) - u(t) \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} [\sin(\omega_d t + \varphi) \cos \varphi + \cos(\omega_d t + \varphi) \sin \varphi] \end{aligned}$$

باجایگذاری معادلات (۲-۳۲) و (۲-۳۴) و (۲-۳۵) در (۲-۲۴) که برحسب ω_0 و α مجدداً بصورت زیر نوشته شده است:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \frac{di_L}{dt} + i_L = \delta(t)$$

ملاحظه خواهیم کرد که سمت چپ، چنانکه انتظار داشتیم، مساوی $\delta(t)$ میگردد. بنابراین با جایگذاری مستقیم ثابت کردیم که (۲-۲۲) پاسخ ضربه مدار RLC موازی است.

تمرین - نشان دهید که پاسخ ضربه برای ولتاژخازن مدار RLC موازی چنین است:

$$(۲-۲۶) \quad v_C(t) = u(t) \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

شکل موج تابع فوق در شکل (۲-۶) ب) نشان داده شده است.

«روش دوم» در این روش از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله استفاده میکنیم. این روش تنها برای مدارهای با اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان قابل استفاده است، چونکه تنها برای اینگونه مدارها پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله میباشد.

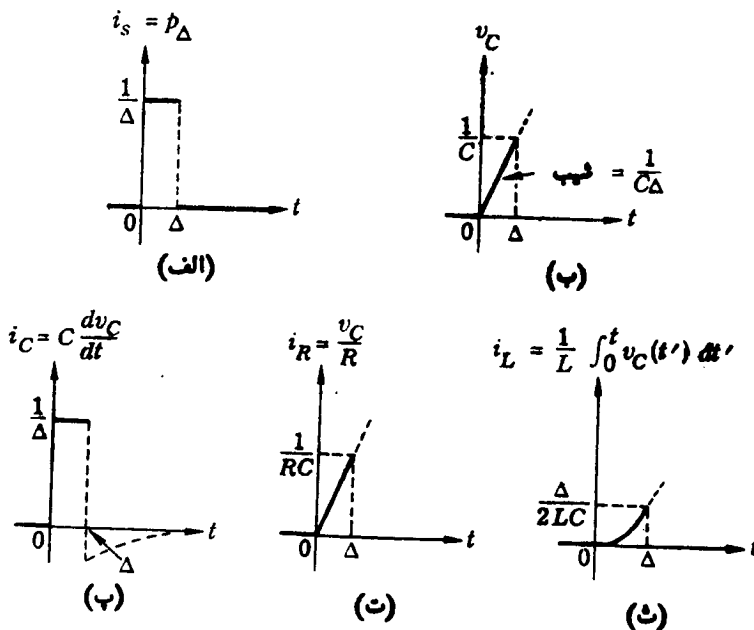
تمرین - نشان دهید که پاسخ های ضربه برای i_L در معادله (۲-۲۲) و v_C در معادله (۲-۲۶) را میتوان با مشتق گیری از پاسخ های پله برای i_L در معادله (۲-۲۱) و v_C در معادله (۲-۲۳) بدست آورد.

«تعبیر فیزیکی» اکنون برای توضیح چگونگی رفتار جریانها و ولتاژهای تمام شاخه ها در مدار RLC موازی، یک ورودی پالس $i_s(t) = p_{\Delta}(t)$ ، مطابق شکل (۲-۸) الف) بکار میبریم. بخاطر بسپارید چنانچه $\Delta \rightarrow 0$ ، پالس p_{Δ} بسمت ضربه میل کرده و پاسخ پالس بسمت پاسخ ضربه میل خواهد نمود. برای شروع کار فرض میکنیم Δ پایاندار و مثبت بوده ولی بسیار کوچک است. در بحث پاسخ پله آموختیم که در $t = 0_+$ تمام جریان منبع بداخل خازن جاری میشود، یعنی:

$$i_C(0_+) = i_s(0_+) = \frac{1}{\Delta} \quad \text{و} \quad i_R(0_+) = i_L(0_+) = 0$$

جریان داخل خازن با شدت اولیه $\frac{dv_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{1}{C\Delta}$ موجب افزایش تدریجی ولتاژ دوسر خازن میگردد. چون توجه اصلی ما به مقدار کوچک Δ است پس فرض

میکنیم در طول فاصله کوتاه (0 ، Δ) شیب منحنی ولتاژ ثابت بماند. در اینصورت مطابق شکل (۲-۸ ب) در زمان Δ ولتاژ بمقدار $\frac{1}{C}$ میرسد. جریان داخل مقاوت متناسب با ولتاژ v_C بوده و بنابراین یک تابع خطی از t است (شکل (۲-۸ ت) را ببینید). جریان داخل سلف که متناسب با انتگرال v_L میباشد یک تابع سهمی از t است (شکل (۲-۸ ث) را ببینید). در این فاصله، جریان داخل خازن بطوریکه در شکل (۲-۸ ب) نشان داده شده است ثابت میماند. البته این فرض که در فاصله (0 ، Δ) تمام جریان منبع از خازن میگذرد صحیح نیست. معه‌ذا خطای موجود شامل جملاتی با درجه‌های بالاتر Δ میباشد و بنابراین وقتی که $0 \rightarrow \Delta$ این خطا صفر میشود. با مراجعه مجدد به شکل (۲-۸ الف) ملاحظه میکنیم وقتی که $0 \rightarrow \Delta$ ، i_C به یک ضربه δ تبدیل شده، v_C جهشی از 0 به $\frac{1}{C}$ پیدا میکند و i_C به یک ضربه δ تبدیل شده، i_R جهشی از 0 به $\frac{1}{RC}$ پیدا میکند و i_L چنان است که :



شکل ۲-۸- تشریح فیزیکی پاسخ ضربه یک مدار RLC موازی، p_Δ پالس ورودی

است، v_C ، i_C ، i_R و i_L بدست آمده نشان داده شده‌اند.

$$i_L(o_-) = i_L(o_+) = \frac{di_L}{dt}(o_-) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{di_L}{dt}(o_+) = \frac{1}{LC}$$

بالاخره وقتی که $o \rightarrow \Delta$ ، از KCL ملاحظه میشود که :

$$i_C(o_+) = -i_R(o_+) - i_L(o_+) = \frac{-1}{RC}$$

توجه کنید که این شرایط با آنهایی که از بکار بردن روش های دیگر، مثلاً در (۳۱-۲) بدست آمده است مطابقت دارند.

۳- روش فضای حالت

تجزیه و تحلیل انجام شده در بخش های قبل تعمیم سر راست روشی بود که برای مدارهای مرتبه اول بکار رفت، یعنی مایک متغیر مناسب را انتخاب کردیم (i_L) در مورد بالا) و یک معادله دیفرانسیل برحسب این متغیر نوشتیم. چنانچه این معادله حل شود متغیرهای دیگر به سهولت محاسبه میشوند. معهذرا راه دیگری برای در نظر گرفتن این مسأله وجود دارد. واضح است هرگاه شرایط اولیه جریان I_0 سلف و ولتاژ V_0 خازن معلوم باشند پاسخ ورودی صفر کاملاً معین میشود. بنابراین میتوان V_0 و I_0 را بعنوان مشخص کننده «حالت اولیه» مدار تصور نمود و حالت کنونی ($i_L(t)$ و $v_C(t)$) را برحسب حالت اولیه (I_0, V_0) بیان کرد. بعبارت دیگر، میتوان رفتار یک مدار را بصورت یک مسیر^(۱) در فضای دو بعدی در نظر گرفت که از حالت اولیه (I_0, V_0) شروع میشود و برای هر t ، نقطه متناظر مسیر، $i_L(t)$ و $v_C(t)$ را معین میکند.

در واقع میتوان سؤال کرد که چرا ما بیاد گرفتن این جنبه جدید نیاز داریم. دلیل این موضوع نسبتاً ساده است. اول آنکه، این روش یک توصیف تصویری روشن از رفتار کامل مدار را بماندهد و دوم آنکه، این روش تنها راه مؤثر تجزیه و تحلیل مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان است. در این حالت های کلی تر، سعی مادر انتخاب یک متغیر مناسب و نوشتن معادله دیفرانسیلی از مرتبه بالاتر برحسب آن متغیر، به بسیاری از پیچیدگی های غیر ضروری منجر میگردد و بدین جهت یک محرك قوی برای یادگیری روش

فضای حالت در زمینه ساده مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم وجود دارد. یک مزیت دیگر این روش آنست که سیستم معادلات بدست آمده از روش فضای حالت، از لحاظ محاسبه و حل عددی آنها در کامپیوترهای دیجیتال و آنالوگ به سهولت قابل برنامه نویسی هستند. بررسی دقیق تر روش فضای حالت در فصل دوازدهم داده خواهد شد.

۳-۱- معادلات و مسیر حالت

اکنون همان مدار RLC موازی را که در بخش ۱ تشریح شد در نظر بگیرید و فرض کنید که ورودی منبع جریان موجود نباشد. میخواهیم پاسخ ورودی صفر را محاسبه کنیم. گیریم i_L و v_C را بعنوان متغیرها بکار برده و معادلات (۱-۱) و (۱-۶) را مجدداً بصورت زیر بنویسیم:

$$(۱-۳) \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C \quad t \geq 0$$

$$(۲-۳) \quad \frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{G}{C} v_C \quad t \geq 0$$

دلیل اینکه معادلات را بصورت فوق مینویسیم (دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول همزمان) بعداً روشن خواهد شد. متغیرهای i_L و v_C دارای اهمیت فیزیکی زیادی هستند چونکه آنها با انرژی ذخیره شده در مدار ارتباط نزدیکی دارند. معادلات (۳-۱) و (۳-۲) معادلات دیفرانسیل همزمان مرتبه اول هستند و «معادلات حالت» مدار خوانده میشوند. جفت عددیهای $(i_L(t), v_C(t))$ را «حالت مدار در زمان t » مینامند. طبیعتاً جفت $(i_L(0), v_C(0))$ را «حالت اولیه» میگویند، این جفت با شرایط اولیه زیر داده میشود:

$$(۳-۳) \quad i_L(0) = I_0$$

$$v_C(0) = V_0$$

از تئوری معادلات دیفرانسیل میدانیم که حالت اولیه داده شده (۳-۳) و معادلات (۳-۱) و (۳-۲) برای همه مقادیر $t \geq 0$ ، مقدار $(i_L(t), v_C(t))$ را بطور یکتا معین میکنند. بنابراین چنانکه $(i_L(t), v_C(t))$ را بعنوان مختصات نقطه‌یی در صفحه $i_L - v_C$

در نظر بگیریم، در این صورت هنگامیکه t از صفر تا بینهایت زیاد میشود نقطه $(i_L(t), v_C(t))$ یک منحنی را که از (I_0, V_0) شروع میشود، طی میکند. این منحنی «مسیر فضای حالت» خوانده میشود و صفحه (i_L, v_C) نیز «فضای حالت» مدار گفته میشود. جفت عددهای $(i_L(t), v_C(t))$ را میتوان بعنوان مؤلفه‌های یک بردار $\mathbf{x}(t)$ که مبدأش مبدأ محورهای مختصات باشد در نظر گرفت بنابراین میتوان نوشت:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

بردار $\mathbf{x}(t)$ را «بردار حالت» یا باختصار «حالت» نامند. بنابراین $\mathbf{x}(t)$ برداری است در فضای حالت که برای همه مقادیر $t \geq 0$ تعریف میشود. مؤلفه‌های این بردار، یعنی جریان i_L داخل سلف و ولتاژ v_C دوسر خازن را «متغیرهای حالت» گویند. با معلوم بودن حالت در زمان t ، یعنی با دانستن جفت عددهای $(i_L(t), v_C(t))$ میتوان سرعت^(۱) مسیر $\left(\frac{di_L}{dt}(t), \frac{dv_C}{dt}(t) \right)$ را از معادلات حالت (۳-۱) و (۳-۲) بدست آورد.

مثال ۱- در مدار RLC موازی، حالت‌های میرای شدید، میرای ضعیف و بی اتلاف را در نظر بگیرید و فرض کنید حالت اولیه $I_0=1$ آمپر و $V_0=1$ ولت باشد. الف- میرای شدید. $R=3$ اهم، $L=4$ هانری، $C=\frac{1}{12}$ فاراد $(\omega_0=\sqrt{3}, \alpha=2)$ بنابراین فرکانس‌های طبیعی $s_1=-1$ و $s_2=-3$ هستند. از معادلات (۱-۲۲) و (۱-۲۳) بدست می‌آوریم:

$$i_L(t) = \frac{1}{8} (e^{-t} - e^{-3t}) + \frac{1}{4} (-e^{-3t} + 3e^{-t}) = \frac{13}{8} e^{-t} - \frac{5}{8} e^{-3t}$$

و:

$$v_C(t) = \frac{1}{4} (-e^{-t} + 3e^{-3t}) + 6(e^{-3t} - e^{-t}) = -\frac{13}{4} e^{-t} + \frac{19}{4} e^{-3t}$$

این شکل موجها در شکل (۳-۱) الف رسم شده‌اند. اکنون t را بعنوان پارامتر بکار

برده و برای هر مقدار t ، حالت $(i_L(t), v_C(t))$ را در فضای حالت، یعنی صفحه‌ای که محور طولهای آن i_L و محور عرضهای آن v_C باشد رسم میکنیم. نتیجه بدست آمده در شکل (۳-۱) ب) نشان داده شده است. توجه کنید که مسیر از نقطه $(1, 1)$ برای $t=0$ شروع میشود و به مبدأ مختصات برای $t=\infty$ ختم میگردد.

ب- میرای ضعیف. $R=1$ اهم، $L=1$ هانری و $C=1$ فاراد $\left(\omega_0=\frac{\sqrt{3}}{2}, \omega_0=1, \alpha=\frac{1}{2}\right)$ از معادلات (۱-۲۴) و (۱-۲۵) داریم:

$$i_L(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - 60^\circ \right)$$

و:

$$v_C(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + 60^\circ \right)$$

شکل موجها در شکل (۳-۲) الف) و مسیر در شکل (۳-۲) ب) رسم شده‌اند. توجه کنید که مسیر به شکل حلزونی^(۱) است که از نقطه $(1, 1)$ شروع شده و به مبدأ مختصات ختم میگردد.

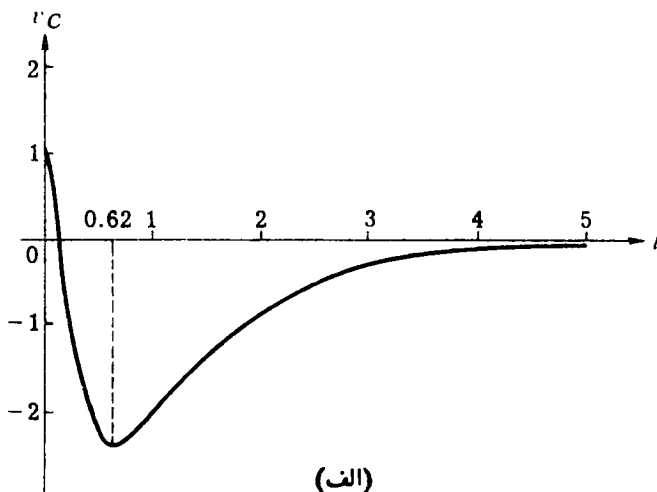
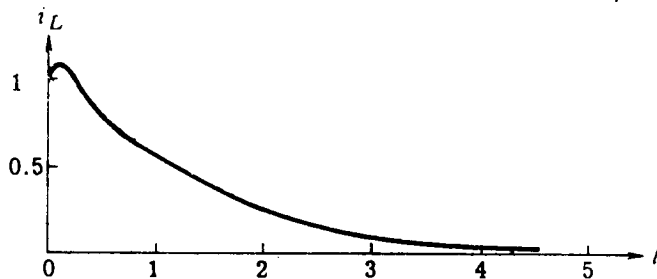
پ- بی اتلاف. $L=\frac{1}{4}$ هانری و $C=1$ فاراد $(\omega_0=2, \alpha=0)$. از معادلات (۱-۲۶) و (۱-۲۷) داریم:

$$i_L(t) = \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t = 1.01 \cos(2t - 7^\circ)$$

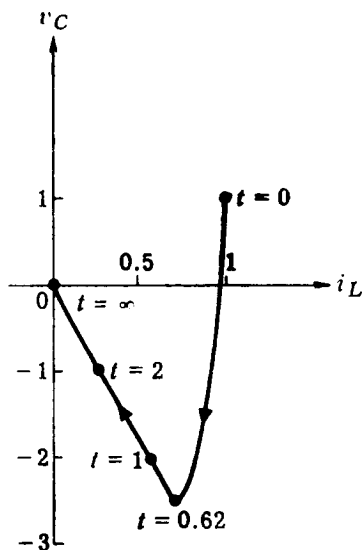
و:

$$v_C(t) = \cos 2t - 8 \sin 2t = 8.06 \cos(2t + 83^\circ)$$

شکل موجها و مسیر در شکل‌های (۳-۳) الف و ب) رسم شده‌اند. توجه کنید که در این مورد، مسیر یک بیضی است که مرکزش در مبدأ مختصات قرار دارد و این نشان دهنده آنست که پاسخ ورودی صفر نوسانی است.

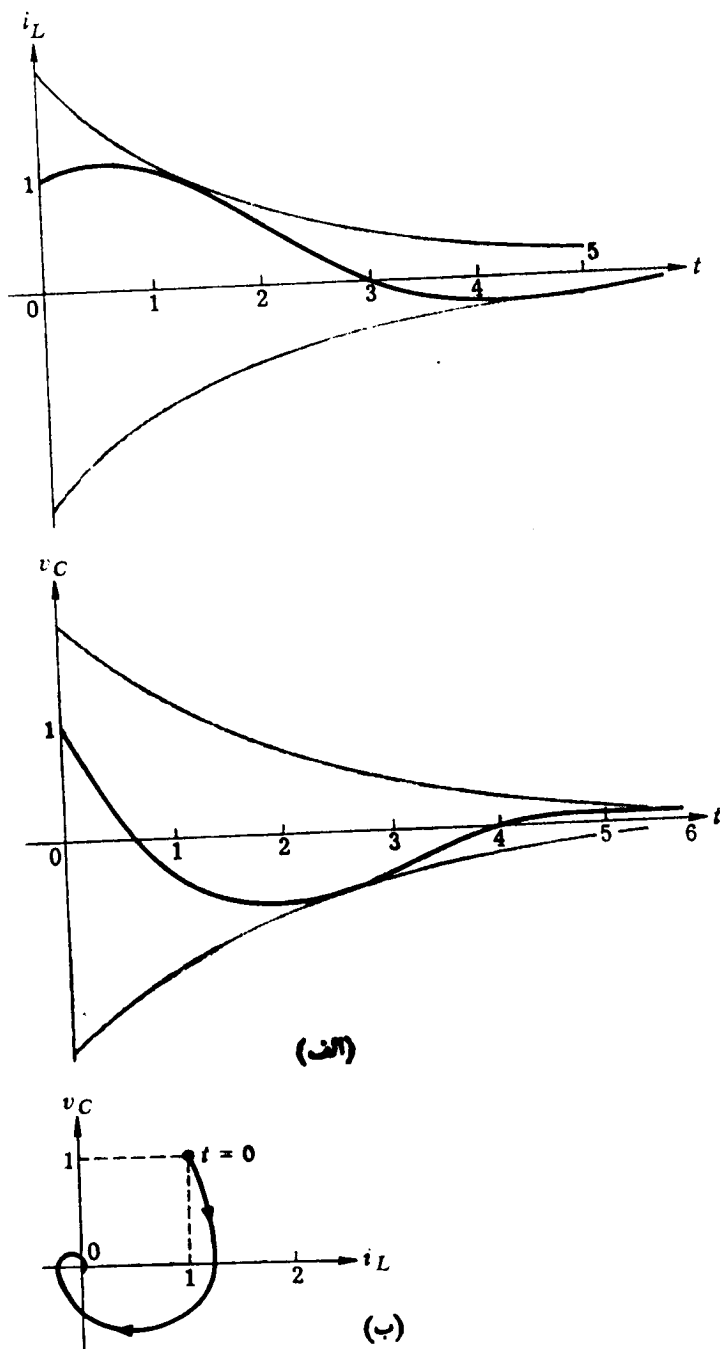


(الف)

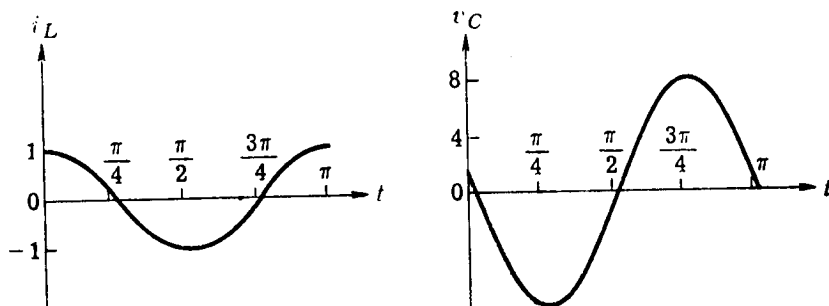


(ب)

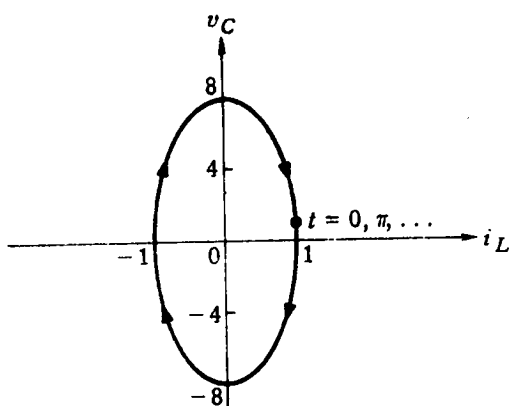
شکل ۱-۳= مدار RLC موازی میرای شدید. (الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت



شکل ۲-۳- مدار موازی میرای ضعیف. (الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت



(الف)



(ب)

شکل ۳-۳- مدار LC موازی بی اتلاف .

(الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت

۳-۲- نمایش ماتریسی

معادلات (۲-۱) و (۲-۲) را میتوان برحسب متغیرهای حالت به شکل ماتریسی بصورت زیر نوشت :

$$(۲-۴) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad t \geq 0$$

و :

$$(۲-۵) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

که در آنجا :

$$(۳-۶) \quad \mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix}$$

و :

$$(۳-۷) \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

معادلات ماتریسی (۳-۴) و (۳-۵) ، بسیار شبیه معادله اسکالر زیر هستند :

$$(۳-۸) \quad \frac{dx}{dt} = ax \quad x(0) = x_0$$

این معادله اسکالر دارای جواب شناخته شده $x(t) = e^{at}x_0$ میباشد . بطریق مشابه ، معادله ماتریسی دارای جواب زیر است :

$$(۳-۹) \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \quad t \geq 0$$

که در آن «ماتریسی» $e^{\mathbf{A}t}$ است که به $\mathbf{A}$ و t بستگی دارد . عبارت هندسی ، این رابطه بردار حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ را به بردار حالت $\mathbf{x}(t)$ در زمان t می‌نگارد^(۱) . در واقع همانطور که عبارت نمایی e^{at} بصورت سری توانی^(۲) بسط داده میشود (که برای همه مقادیر t معتبر است) :

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$$

ماتریس $e^{\mathbf{A}t}$ نیز بصورت سری توانی بسط داده میشود (که برای همه مقادیر t معتبر است) :

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

که در آنجا $\mathbf{I}$ ماتریس واحد^(۳) است . در سری اخیر هر جمله یک «ماتریس» میباشد و

بنابراین $\mathbf{A}t$ نیز یک ماتریس است. هر عنصر ماتریس $\mathbf{A}t$ تابعی از t است. تذکر این نکته حایز اهمیت است که معادله (۳-۹) یک «تابع خطی» را نمایش میدهد که بردار $\mathbf{x}_0$ (برداری حالت اولیه) را به بردار $\mathbf{x}(t)$ (برداری حالت در زمان t) می نگارد. گرچه بیشتر از این درباره نمایش و محاسبه $\mathbf{A}t$ صحبت نخواهیم کرد، معیناً این مطلب که معادله برداری (۳-۹) تمام مسیر فضای حالت را بوجود می آورد حایز کمال اهمیت است.

۳-۳- روش تقریبی برای محاسبه مسیر حالت

با توجه به معادلات (۳-۴) و (۳-۵) میتوان برای هر t ، معادله (۳-۴) را بعنوان تعریف کننده سرعت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$ در طول مسیر در نقطه $\mathbf{x}(t)$ از فضای حالت در نظر گرفت. بویژه با معلوم بودن حالت اولیه $\mathbf{x}(0)$ ، معادله (۳-۴) سرعت اولیه بردار حالت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(0)$ را بیا میدهد. میتوان برای محاسبه مسیر تقریبی از یک روش ساده مرحله بمرحله استفاده نمود. روش فوق متکی بر این فرض است که اگر یک فاصله زمانی خیلی کوچک Δt در نظر گرفته شود، در طول این فاصله سرعت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ تقریباً ثابت میماند، بعبارت دیگر، مسیر تقریباً یک پاره خط مستقیم است. بنابراین اگر در زمان 0 با حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ شروع کنیم خواهیم داشت:

$$(۳-۱۰) \quad \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

و چون فرض میشود که در طول فاصله کوچک $(0, \Delta t)$ سرعت ثابت میماند داریم:

$$(۳-۱۱) \quad \mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}_0 + \frac{d\mathbf{x}}{dt}(0)\Delta t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Delta t$$

برای فاصله بعدی، $(\Delta t, 2\Delta t)$ ، مجدداً فرض میکنیم که سرعت ثابت باشد و آنرا بر مبنای مقدار تقریبی $\mathbf{x}(\Delta t)$ که بوسیله (۳-۱۱) داده میشود محاسبه میکنیم و داریم:

$$(۳-۱۲) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt}(\Delta t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\Delta t)$$

و بنابراین:

$$(۳-۱۳) \quad \mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(\Delta t)\Delta t$$

به‌همین ترتیب برای محاسبه مقادیر تقریبی متوالی حالت ادامه می‌دهیم :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)\Delta t] &\approx \mathbf{x}(k\Delta t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(k\Delta t)\Delta t \\ &= (\mathbf{I} + \Delta t\mathbf{A})\mathbf{x}(k\Delta t) \end{aligned} \quad k=0, 1, 2, \dots, N$$

میتوان این روش را به‌سختی برای کامپیوترهای دیجیتال بکاربرد. در واقع میتوان نشان داد که چنانچه $\Delta t \rightarrow 0$ ، مقادیر تقریبی متوالی $\mathbf{x}(\Delta t)$ ، $\mathbf{x}(2\Delta t)$ ، ...، $\mathbf{x}(N\Delta t)$ که بدینسان حساب میشوند، به‌سمت نقاط واقعی مسیر واقعی میل میکنند. مقدار Δt که در عمل باید انتخاب شود به عوامل زیر بستگی دارد. (۱) تعداد رقم‌های با معنی^(۱) که در محاسبات نگهداری میشود، (۲) دقت مورد نیاز، (۳) ثابت‌های مسأله و (۴) طول فاصله زمانی که مسیر فوق‌در آن خواسته میشود. چنانچه مسیر فوق محاسبه شود، میتوان به‌سختی پاسخ مدار را تعیین نمود زیرا این پاسخ یکی از مؤلفه‌های حالت و یا ترکیب خطی آنها میباشد.

مثال ۲- گیریم این روش را برای محاسبه مسیر حالت مدار RLC موازی با

میرایی ضعیف مثال ۱ بکاربریم. معادله حالت چنین است :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

و حالت اولیه عبارتست از :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

گیریم $\Delta t = 0.2$ ثانیه انتخاب شود. میتوان از (۲-۱۱) برای بدست آوردن حالت در Δt استفاده کرد، بنابراین :

$$\begin{bmatrix} x_1(0.2) \\ x_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

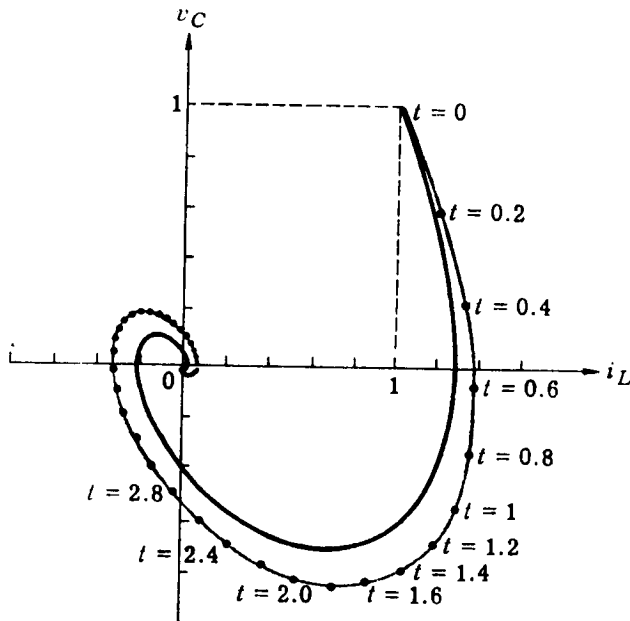
سپس از (۳-۱۳)، حالت در $2\Delta t$ بدست میاید و داریم :

$$\begin{bmatrix} x_1(0.4) \\ x_2(0.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.32 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

در واقع میتوان از روی (۳-۱۴)، حالت در $(k+1)\Delta t$ را برحسب حالت در $k\Delta t$ بصورت زیر نوشت :

$$\mathbf{x}[(k+1)\Delta t] = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k\Delta t)$$

شکل (۳-۴) مسیر را بصورت یک منحنی پیوسته و نقاطی که با $\Delta t = 0.2$ ثانیه حساب شده‌اند نشان میدهد. چنانچه $\Delta t = 0.002$ ثانیه را بکار می‌بردیم نقاطی که از کاربرد



شکل ۳-۴- محاسبه مسیر حالت با استفاده از روش مرحله بمرحله برای مثال ۲

با $\Delta t = 0.2$ ثانیه.

مکرر معادله (۳-۱۴) بدست می‌آمدند همگی روی مسیر واقعی قرار می‌گرفتند.

تمرین - مسیر حالت مثال ۲ را برای موارد زیر محاسبه کنید :

الف - $\Delta t = 0.1$ ثانیه

ب - $\Delta t = 0.05$ ثانیه

نتایج حاصل را توضیح دهید.

تبصره - اگر یک مدار RLC موازی که در آن مقاومت ، سلف و خازن « غیر خطی » ولی تغییر ناپذیر با زمان باشند را در نظر بگیریم در این صورت با برقراری فرض‌های نسبتاً کلی در مورد مشخصه‌های آنها ، معادلاتی بصورت زیر خواهیم داشت :

$$(۳-۱۵) \quad \frac{di_L}{dt} = f_1(i_L, v_C) \quad , \quad \frac{dv_C}{dt} = f_2(i_L, v_C)$$

که در آن توابع f_1 و f_2 بر حسب مشخصه‌های شاخه‌ها بدست می‌آیند .
توجه باین موضوع حایز اهمیت است که روش عمومی بدست آوردن محاسبه تقریبی مسیر در این مورد نیز برقرار است و معادلات چنین هستند :

$$(۳-۱۶) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

و معادلات متناظر با (۳-۱۱) و (۳-۱۲) اکنون چنین هستند :

$$(۳-۱۷) \quad \mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\Delta t$$

$$\mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(\Delta t))\Delta t$$

در بخش ۵ مثالهایی در این مورد داده خواهد شد.

۴-۳- معادلات حالت و پاسخ کامل

اگر مدار RLC موازی مطابق شکل (۲-۱) با یک منبع جریان تحریک شود ، بطریق مشابهی میتوان معادلات حالت را نوشت . در مرحله اول ، ولتاژ دو سر مدار موازی با حالتیکه هیچ منبعی وجود نداشت یکسان است و مانند معادله (۳-۱) بدست می‌آوریم که :

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_C$$

سپس در معادله KCL بایستی اثر منبع جریان را دخالت داد. بنابراین در مقایسه با معادله (۳-۲) یک جمله اضافی لازم است و داریم :

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{G}{C} v_C + \frac{i_s}{C}$$

حالت اولیه همان است که توسط معادله (۳-۲) داده میشود :

$$i_L(0) = I_0$$

$$v_C(0) = V_0$$

اگر بردار $\mathbf{x}$ برای نشان دادن بردار حالت بکار رود ، یعنی ، $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ ، معادله حالت بصورت ماتریسی چنین خواهد بود :

$$(۳-۱۸) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w$$

و حالت اولیه عبارتست از :

$$(۳-۱۹) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

در معادله (۳-۱۸) :

$$(۳-۲۰) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix}$$

و :

$$(۳-۲۱) \quad \mathbf{b}w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} i_s$$

ماتریس های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{b}$ به اجزاء مدار بستگی دارند و ورودی با w نشان داده شده است.

معادله (۳-۱۸) یک معادله دیفرانسیل ماتریسی ناهمگن مرتبه اول است که مشابه معادله دیفرانسیل اسکالر خطی ناهمگن مرتبه اول زیر می‌باشد :

$$(۳-۲۲) \quad \frac{dx}{dt} = ax + bw$$

جواب این معادله اسکالر که در شرط اولیه داده شده $x(0) = x_0$ صدق میکند چنین است :

$$(۳-۲۳) \quad x = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-t')} bw(t') dt'$$

توجه کنید که پاسخ کامل بصورت مجموع دو جمله نوشته شده است. جمله اول، یعنی $e^{at} x_0$ پاسخ ورودی صفر است و جمله دوم، که بصورت انتگرال نمایش داده شده است پاسخ حالت صفر می‌باشد. بطریق مشابه، معادله ماتریسی (۳-۱۸) دارای جواب زیر است :

$$(۳-۲۴) \quad \mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-t')} \mathbf{b}w(t') dt'$$

جمله اول، یعنی $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$ پاسخ ورودی صفر است و جمله دوم، که بصورت انتگرال نمایش داده شده است پاسخ حالت صفر می‌باشد. اگر چه اثبات رابطه (۳-۲۴) در اینجا داده نخواهد شد معیناً صورت معادله (۳-۲۴) قابل توجه است. چنانکه دیده میشود مجدداً این عبارت به محاسبه $e^{\mathbf{A}t}$ بستگی دارد. روش تقریبی محاسبه $\mathbf{x}$ که در بخش (۳-۳) داده شد در اینجا نیز میتواند مورد استفاده قرار گیرد.

۴- نوسان، مقاومت منفی و پایداری

ما در بخش‌های پیش مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را به تفصیل بررسی کردیم و جواب‌های حالت میرای ضعیف را صریحاً بدست آوردیم. حالت خاص مورد توجه این بخش حالت بی اتلاف است که دارای پاسخ ورودی صفر نوسانی است. ما خواص چنین مداری را مطالعه خواهیم کرد و بعلاوه برخی توجهات فیزیکی خاص مربوط به آن را نیز بیان خواهیم نمود.

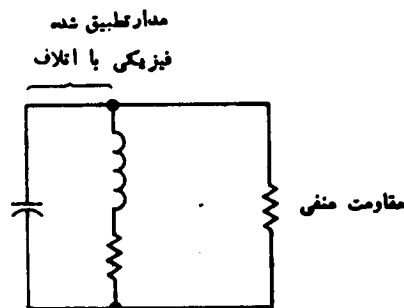
مدار LC موازی بی اتلاف را میتوان بعنوان حالت خاص یک مدار میرای ضعیف با $R = \infty$ (یا $G = 0$, $\alpha = 0$, $Q = \infty$) در نظر گرفت. در تشکیل دادن معادلات دیفرانسیل برحسب ولتاژ خازن یا جریان سلف و بدست آوردن معادلات حالت، هیچ تفاوتی نسبت به مدار میرای ضعیف وجود ندارد. بعلاوه میتوان پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر را مستقیماً با قرار دادن $\alpha = 0$ و $\omega_0 = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ، از روی پاسخ حالت میرای ضعیف بدست آورد. اکنون پاره‌ای از این نتایج را مرور میکنیم. فرکانس‌های طبیعی مدار بی اتلاف $s = \pm j\omega_0$ ، $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ میباشد. پاسخ ورودی صفر یک سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای ω_0 است که این حقیقت در مثال ۱ بخش ۳ تشریح شد. مسیر حالت مطابق شکل (۳-۲) ب) یک بیضی است که ملزم میدارد پاسخ ورودی صفر یک مدار بی اتلاف، یک نوسان مداوم باشد. انرژی ذخیره شده اولیه در خازن و/یا در سلف بطور بی پایان بیکدیگر منتقل میشوند.

اکنون پاسخ حالت صفر را در نظر میگیریم. با مراجعه به بخش ۲ بخاطر میاوریم که پاسخ ضربه یک مدار LC بی اتلاف، یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω_0 میباشد. پاسخ پله نیز شامل یک قسمت سینوسی با همان فرکانس است. در واقع اگر در زمان صفر مدار در حالت صفر بوده و در فاصله $[0, T]$ (که در آن T هر زمان بزرگتر از صفر میباشد) یک ورودی دلخواه بان اعمال شود و پس از زمان T این ورودی مساوی صفر قرار داده شود، در اینصورت برای زمانهای بعد از T پاسخ بصورت $K \sin(\omega_0 t + \theta)$ خواهد بود که در آن دامنه K و فاز θ به ورودی بستگی دارند.

مدار LC بی اتلاف، یک مدار تشدید یا یک مدار تطبیق شده^(۱) نامیده میشود. واژه «تطبیق شده» ملزم میدارد که فرکانس نوسان با تنظیم مقدار خازن یا سلف، با یک عدد داده شده $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ تطبیق داده شود. اگر مدار فیزیکی چنان میبود که سلف و خازن فیزیکی آن همانند مدل‌های سلف و خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان ما بودند، یک نوسان ساز خطی^(۲) بدست می‌آمد که با فرکانس زاویه‌ای ω_0 نوسان میکرد.

واضح است که عناصر فیزیکی همانند مدل‌های مداری ما نیستند و چنانکه در فصل دوم گفته شد یک سلف «فیزیکی» همیشه دارای مقدار معینی اتلاف است و مدل آن باید بصورت اتصال سری یک سلف و یک مقاومت در نظر گرفته شود. بنابراین در عمل یک مدار تطبیق شده فیزیکی (بتنهایی) یک نوسان ساز نیست و بشرطیکه اتلاف آن بقدر کافی کوچک باشد بصورت یک مدار با میرایی ضعیف رفتار میکند. در عمل، برای مدارهای تطبیق شده میتوان Q را تا حدود چندین صد بدست آورد. از نظر اصولی، با استفاده از فوق رساناها^(۱) میتوان مدارهایی با Q بینهایت نیز بدست آورد.

برای بدست آوردن یک نوسان ساز لازم است اتلاف موجود در هر مدار تطبیق شده فیزیکی را جبران نمود. واضح ترین وسیله برای اینکار وارد کردن عنصری با مقاومت منفی به مدار است بقسمی که نتیجه حاصل یک مداری بی اتلاف باشد. غالباً میتوان یک نوسان ساز نوعی را متشکل از یک مدار تطبیق شده فیزیکی که بیک مقاومت با مقاومت منفی متصل است تصور نمود. این مطلب در شکل (۱-۴) تشریح شده است. در فصل دوم درباره خاصیت مقاومت منفی سیگنال کوچک یک دیود تونلی بحث شده است. بعداً خواهیم دید که با استفاده از پس خورد^(۲) در یک مدار ترانزیستوری نیز میتوان مقاومت منفی بدست آورد. همه این مقاومت‌های منفی تقریبی هستند یعنی فقط در فاصله معینی از ولتاژها



شکل ۱-۴ = یک نوسان ساز خطی ساده که دارای یک مدار تطبیق شده

فیزیکی و یک مقاومت منفی است

و جریانه‌ها و شاید فقط در باند معینی از فرکانس، این گونه وسایل مانند مقاومتهای خطی تغییر ناپذیر با زمان با مقاومتهای منفی رفتار مینمایند. با وجود این، مدل یک مقاومت اکتیو خطی تغییر ناپذیر با زمان مفید بوده و ما آنرا برای تجزیه و تحلیل رفتار بعضی مدارهای ساده مرتبه دوم بکار خواهیم بود. درک کامل این مدارها در مطالعه مدارهای غیر خطی سودمند خواهد بود.

اکنون مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان مطابق شکل (۲-۴) را در نظر بگیرید که در آن مقاومت دارای یک مقاومت «منفی» ($R < 0$ و $G < 0$) میباشد. چند جمله‌ای مشخصه برای این مدار، $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$ است که در آن $\alpha = -\frac{G}{2C}$

منفی میباشد و ω_0 مانند حالت قبل مساوی $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ است. ریشه‌های معادله مشخصه فرکانس‌های طبیعی مدار هستند و چون $\alpha < 0$ است میتوان آنها را بصورت زیر نوشت:

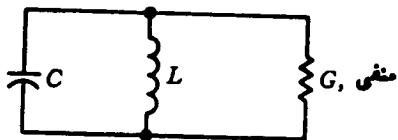
$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ انگاری خالص و یا حقیقی است که در حالت اخیر از $|\alpha|$ کوچکتر میباشد. بنابراین فرکانس‌های طبیعی در نیمه راست صفحه فرکانس مختلط قرار دارند. ما پاسخ ورودی صفر را بررسی کرده و طبقه بندی زیر را انجام میدهم:

۱- $|\alpha| < \omega_0$: دو فرکانس طبیعی مزدوج مختلط هستند $s_1 = -\alpha + j\omega_d$ و $s_2 = -\alpha - j\omega_d$ که در آن $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$. بنابراین پاسخ چنین است:

$$ke^{at} \cos(\omega_d t + \theta)$$

که در آن k و θ ثابت‌هایی هستند که بشرايط اولیه بستگی دارند.



شکل ۲-۴- مدار RLC موازی

۲- $|\alpha| > \omega_0$: دو فرکانس طبیعی s_1 و s_2 حقیقی و مثبت هستند و پاسخ مجموع دو نمایی «افزایشی» میباشد :

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

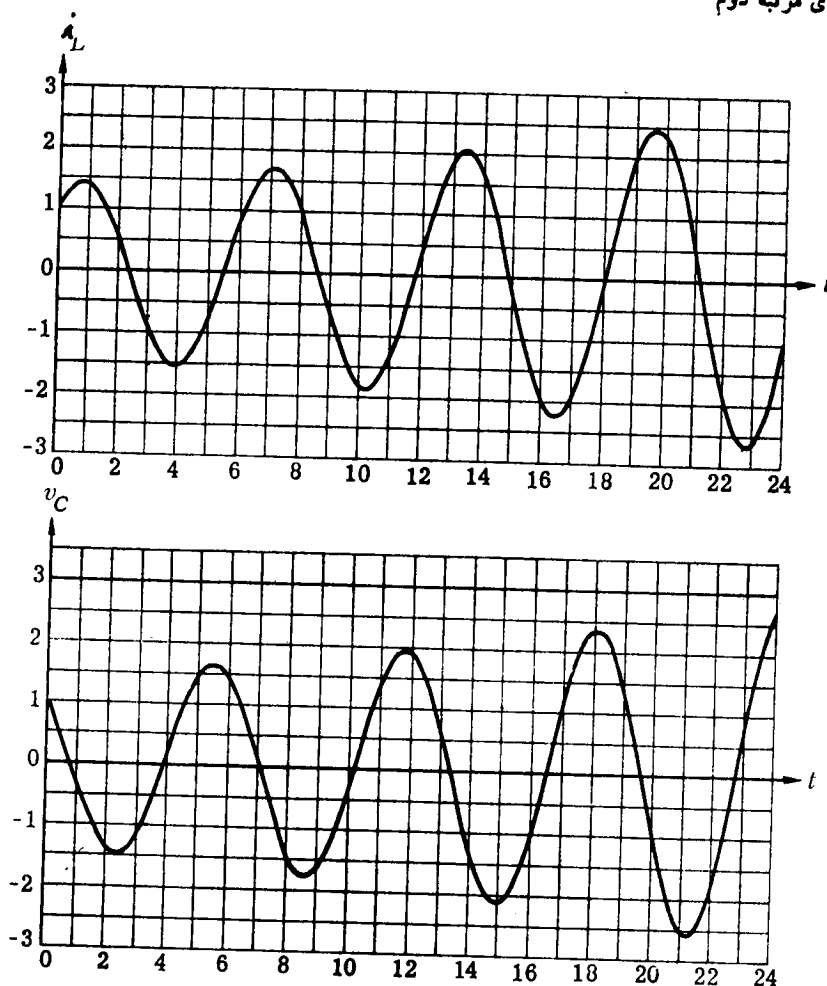
که در آن k_1 و k_2 بشرایط اولیه بستگی دارند.

پاسخ‌ها در هر دو حالت شامل عوامل نمایی افزایشی می‌باشند و بنابراین با مرور زمان پاسخ‌ها بطور دلخواهی بزرگ میشوند. روش تعیین شکل موجهای i_L و v_C درست مانند موردی است که در آن مقاومت مثبت میباشد. منحنی‌های v_C و i_L برحسب t در شکل (۴-۳) و مسیر حالت برای یک مورد $(|\alpha| < \omega_0)$ و حالت اولیه $v_C(0) = 1$ و $i_L(0) = 1$ در شکل (۴-۴) داده شده‌اند.

درک این پاسخ‌ها حائز کمال اهمیت است. مقاومت خطی دارای مقاومت «منفی»، جزء «اکتیوی» است که بجای اینکه مانند مقاومت پسیو انرژی تلف نماید به سلف و خازن انرژی تحویل میدهد. بنابراین بدون هیچ ورودی، پاسخ‌ها پس از اینکه در اثر انرژی اولیه در سلف و / یا خازن شروع شدند میتوانند افزایش یابند. چنانکه قبلاً اشاره شده است، مقاومت خطی اکتیو تنها مدلی است که رفتار برخی از وسایل را در فاصله مشخص شده‌ای از ولتاژ و جریان بطور تقریبی نشان میدهد. اگر ولتاژها و جریانها خارج از این مقادیر مشخص شده افزایش یابند، محاسبات، دیگر رفتار فیزیکی واقعی مدار را نمایش نمیدهند. در اکثر موارد بایستی توصیف غیرخطی دستگاه را در نظر گرفت و نتایج ریاضی حاصل از فرض تقریب خطی را اصلاح نمود. چنانکه در بخش بعد نشان داده خواهد شد، ممکن است رفتار فیزیکی واقعی به نوسان غیر خطی منتهی شود و یا در موارد دیگر پاره‌ای از عناصر مدار نتوانند جریان زیاد را تحمل نموده و بالاخره بسوزند.

اکنون به تجزیه و تحلیل خطی خود برسیگرسیم و دو مورد مقاومت‌های خطی اکتیو و پسیو را باهم در نظر میگیریم. پاسخ‌های ورودی صفر مدارهای RLC موازی را میتوان به دسته تقسیم نمود.

«حالت اول» فرکانس‌های طبیعی در «نیمه چپ صفحه» قرار دارند، یعنی هر دو فرکانس طبیعی s_1 و s_2 «جزء‌های حقیقی منفی» دارند و این امروالتهای میرای شدید، میرای بحرانی و میرای ضعیف بخش ۱ را شامل میشود. بعلت وجود عامل نمایی میرا



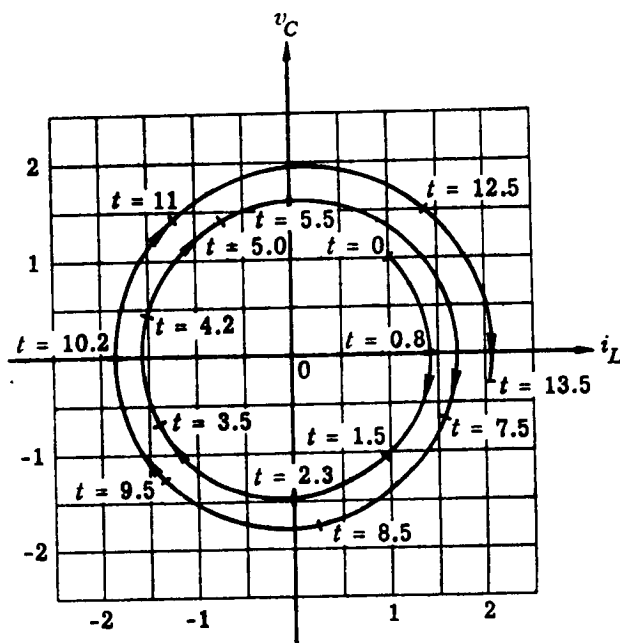
شکل ۳-۴- منحنی‌های i_L و v_C برای مدار RLC موازی شکل (۲-۴). به مقاومت اکتیو توجه کنید. فرض می‌شود که $|a| < \omega_0$ است

وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، پاسخ ورودی صفر به سمت صفر میل می‌کند. در فضای حالت وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، برای هر حالت اولیه مسیر حالت به سمت مبدأ میل می‌کند. چنین مداری را «پایدار مجانبی»^(۱) نامند. مسیرهای حالت شکل‌های (۳-۱) و (۳-۲) ب) مثال‌های نوعی هستند. چون مفهوم پایداری مجانبی بی‌اندازه حایز اهمیت است یکبار دیگر آنرا تکرار

میکنیم. مداری را پایدار هجانبی گویند که مسیر فضایی حالت آن برای هر حالت اولیه و برای ورودی صفر، کراندار^(۱) بماند و وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، مسیر به سمت مبدأ میل کند. شرط کراندار بودن تنها برای پایداری مدارهای غیر خطی خاص حایز اهمیت است.

«حالت دوم» فرکانس‌های طبیعی روی «محور انگاری» قرار دارند، یعنی s_1 و s_2 دارای جزءهای حقیقی صفر میباشند. $s_1 = j2\pi f_0$ و $s_2 = -j2\pi f_0$. این حالت بی اتلاف است. پاسخ ورودی صفر یک سینوسی با فرکانس f_0 میباشد. در فضای حالت مسیر یک بیضی است که مرکز آن در مبدأ واقع است و مدار را «نوسانی» گویند.

«حالت سوم» فرکانس‌های طبیعی در «نیمه راست صفحه» قرار دارند، یعنی s_1 و s_2 دارای جزءهای حقیقی مثبت میباشند. این وضع متناظر با حالت مقاومت منفی است و وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، پاسخ ورودی صفر پیکران^(۲) میگردد. در فضای حالت وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، مسیر به سمت بینهایت میل میکند و مدار را «ناپایدار» گویند. یک مثال نمونه‌ای مسیر شکل (۴-۱) میباشد. شکل موجهای متناظر i_L و v_C در شکل (۳-۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۱ - مسیر حالت مدار RLC شکل (۳-۲)

۵- مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان

هنگامیکه در فصل چهارم مدارهای مرتبه اول غیر خطی و تغییر پذیر با زمان را بررسی می‌کردیم متوجه شدیم که گاهی میتوان این مسائل را بطور تحلیلی نیز حل نمود. علاوه بر نشان دادن راه حل های ساده تحلیلی در فصل چهارم تأکید اصلی ما نشان دادن این واقعیت بود که در مدارهای غیر خطی خاصیت خطی بودن برقرار نبوده و در مدارهای تغییر پذیر با زمان نیز خاصیت تغییر ناپذیری با زمان برقرار نمیباشد. در مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان مرتبه دوم نیز برای پاره‌ای از مدارهای بسیار خاص، روشهای تحلیلی وجود دارد. همچنین روش های ترسیمی گوناگونی موجود است که برای انواع زیادی از شبکه ها میتوان آنها را با مزایای بیشتری بکار برد. در کتاب ها، معادلات و روشهای خاص زیادی مانند معادله ون در پل^(۱)، معادله ساتیو^(۲)، معادله دافین^(۳)، روش خطوط هم شیب^(۴) و روش لینارد^(۵) وجود دارند، ولی ما این روش های مرسوم را ارائه نخواهیم کرد، زیرا اولاً، آنها موضوع های تخصصی ویژه ای بوده و پروشنی از حدود مطالب این کتاب خارج هستند، ثانیاً، در عصر کامپیوترهای دیجیتال، اینگونه معادلات و روش های خاص اهمیت خود را ازدست داده اند، زیرا بجای در نظر گرفتن یک تقریب ناقص که بکمک آن مسأله را در قالب مسأله دیگری که حل آن معلوم است در آوریم، حل بهترین مدل معلوم هم ارزانتر بوده و هم مفهوم مهندسی بیشتری دارد.

در این بخش منظور ما ابتدا بیان رفتار فیزیکی پاره ای از مدارهای غیر خطی و سپس تشریح دقیق نوشتن معادلات دیفرانسیل اینگونه مدارهای غیر خطی میباشد. معادلاتی که از لحاظ محاسبات عددی راحت ترین شکل را دارند دستگاه های دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشند (بجای یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی). در مورد مدارهای خطی، این معادلات را معادلات حالت گویند، درحالیکه در مورد مدارهای غیر خطی آنها را

۱- van der Pol

۲- Mathieu

۳- Duffin

۴- Isocline

۵- Liénard

«معادلات بصورت نرمال^(۱)» می‌نامند. یعنی :

$$(۵-۱) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, w)$$

که در آن $\mathbf{x}$ نمایشگر برداری است که مولفه‌های آن متغیرهای انتخاب شده شبکه باشند (ولتاژها، جریان‌ها، بارها و شارها)، w نشان دهنده ورودی و $\mathbf{f}$ تابعی با مقدار برداری^(۲) است. معادله (۵-۱) تعمیم معادله حالت خطی زیر است :

$$(۵-۲) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w$$

که در بخش ۲ درباره آن بحث شد. چنانکه قبلاً گفته شد، برای کارهای عددی می‌توان روش انتگرال‌گیری مرحله به مرحله را بکار برد. دو مثال زیر این نکات را روشن می‌سازند.

مثال ۱- مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۵-۱) که در آن سلف و خازن، خطی و تغییر ناپذیر با زمان بوده ولی مقاومت یک عنصر غیر خطی با مشخصه نشان داده شده در شکل می‌باشد را در نظر بگیرید. ممکن است در بعضی موارد مشخصه غیر خطی با یک چند جمله‌ای بصورت زیر تقریب گردد :

$$(۵-۳) \quad g(v) \approx -\alpha v + \beta v^3$$

که در آن α و β ثابت‌هایی هستند که برای برازاندن^(۳) منحنی شکل (۵-۱) انتخاب می‌شوند. ابتدا می‌توان ولتاژ v را به جریان سلف بصورت زیر ارتباط داد :

$$(۵-۴) \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v}{L} \quad i_L(0) = I_0$$

پس با نوشتن معادله KCL برای مدار داریم :

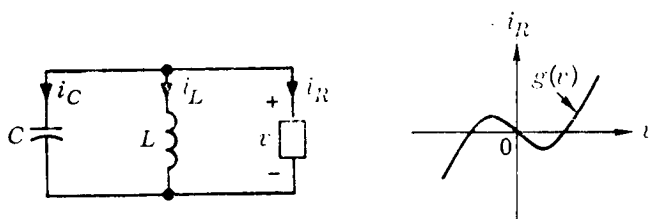
$$i_C = -i_L - i_R$$

و یا :

۱- Equations in the Normal Form

۲- Vector - valued function

۳- Fit



شکل ۵-۱- نوسان ساز غیر خطی با یک مقاومت غیر خطی که مشخصه‌اش در صفحه $v i_R$

نشان داده شده است

$$(۵-۵) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{i_L}{C} - \frac{g(v)}{C} \quad v(0) = V_0$$

با ترکیب معادلات (۵-۴) و (۵-۵) معادله‌ای بصورت نرمال خواهیم داشت :

$$(۵-۶) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{L} \\ -\frac{i_L}{C} - \frac{g(v)}{C} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

با حالت اولیه :

$$(۵-۷) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0$$

بامعلوم بودن حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ ، اعداد L و C و مشخصه $g(\cdot)$ ، میتوان جواب را بوسیله روش مرحله بمرحله گفته شده در بخش ۳ بدست آورد. در این روش باحالت اولیه داده شده $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ در (۵-۷) شروع کرده و حالت $\mathbf{x}(\Delta t)$ در زمان Δt را بوسیله معادله (۲-۱۷) محاسبه میکنیم. بنابراین :

$$\mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}(0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \Delta t$$

و سپس چنین ادامه میدهیم :

$$\mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{f}[\mathbf{x}(\Delta t)] \Delta t$$

بنابراین میتوان مسیر را در فضای حالت یعنی صفحه $i_L v$ رسم نمود. دو نمونه از این مسیرها در شکل (۲-۵) ارائه شده است. مسیر اول که در شکل (۲-۵ الف) نشان داده شده است حالت اولیه زیر را دارد:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

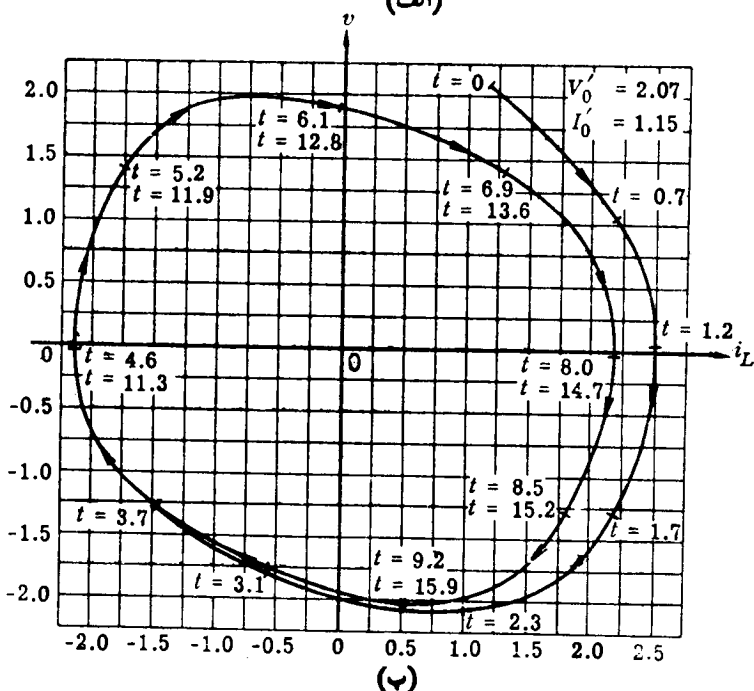
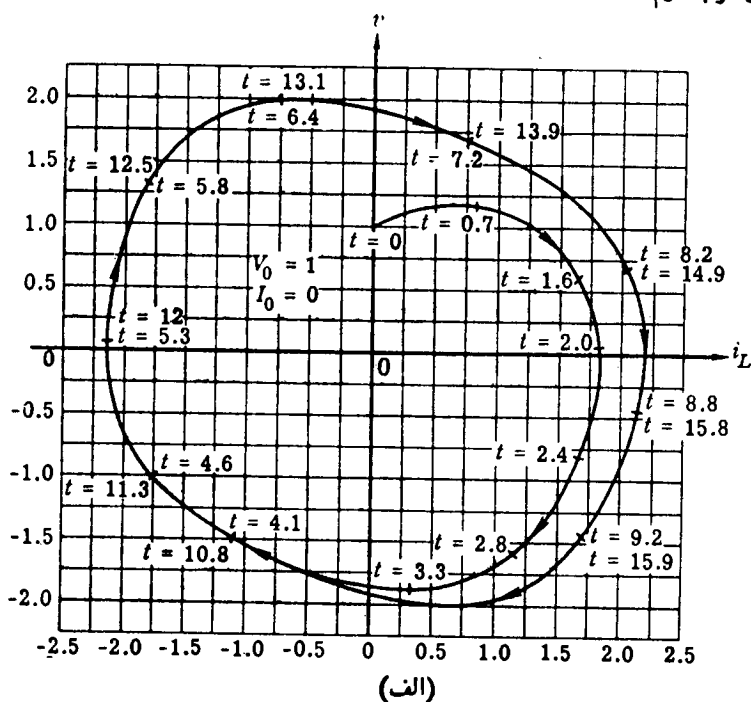
توجه کنید که با افزایش t مسیر بسمت منحنی بسته‌ای که «سیکل حد^(۱)» خوانده میشود میل میکند و این امر لازم میدارد که پس از مدتی، پاسخ ورودی صفر مدار غیرخطی، فوق‌العاده بیک حرکت تناوبی نزدیک شود یعنی بالاخره هردو شکل موج $i_L(0)$ و $v(0)$ بصورت توابع تناوبی از زمان درمیآیند. در شکل (۲-۵ ب)، از یک حالت اولیه متفاوت شروع میکنیم:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.15 \\ 2.07 \end{bmatrix}$$

مشاهده این نکته قابل توجه است که در این حالت با افزایش t مسیر از بیرون بسمت «همان» سیکل حد میل میکند.

تبصره ۵ = باید خاطر نشان ساخت که تفاوت‌های مشخصی بین پاسخ ورودی صفر یک مدار خطی و پاسخ ورودی صفر یک مدار غیرخطی وجود دارد. مدار LC موازی خطی (حالت بی‌اتلاف) که با حالت اولیه دلخواهی شروع میشود بلافاصله به نوسان سینوسی میرسد و بعلاوه دامنه‌های نوسان i_L و v به حالت اولیه بستگی دارند. مدار غیرخطی پس از یک حالت گذرا به حالت نوسانی میرسد و در این مثال بنظر نمیآید که دامنه نوسان به حالت اولیه بستگی داشته باشد.

«تقریب خطی تکه‌ای» اکنون رفتار فیزیکی مدار را بر مبنای تقریب خطی تکه‌ای مشخصه مقاومت غیر خطی بیان میکنیم. دامنه تغییرات ولتاژ در دوسر مقاومت در شکل (۲-۵ الف) رابه سه ناحیه تقسیم میکنیم. در ناحیه ۱، یعنی آنجائیکه $-E_1 \leq v < -\infty$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی با شیب مثبت $\frac{1}{R_1}$ که محور i_R را



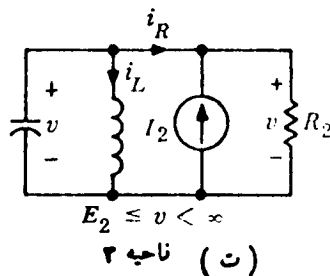
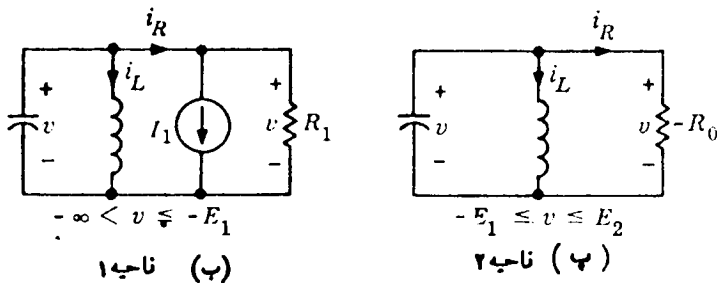
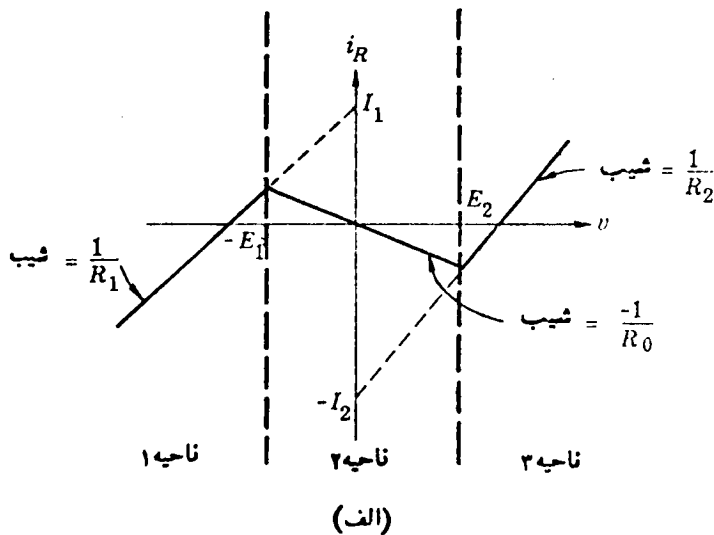
شکل ۲-۵- مسیرهای نوسان ساز غیر خطی شکل (۱-۵). برای هر دو شرایط اولیه سیکل حد یکسانی بدست می‌آید

در نقطه‌ی بعرض I_1 قطع میکند تقریب میکنیم. بنابراین مقاومت غیر خطی در ناحیه ۱ را میتوان با اتصال موازی یک مقاومت خطی با مقاومت مثبت R_1 و یک منبع جریان ثابت I_1 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-ه) نشان داده شده است. در ناحیه ۲، یعنی آنجائیکه $E_1 < v < E_2$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی که از مبدأ گذشته و شیب منفی $-\frac{1}{R_0}$ دارد مطابق شکل (۳-الف) تقریب میکنیم (توجه کنید که $R_0 > 0$). بنابراین مقاومت «اکتیو» غیرخطی در ناحیه ۲ را میتوان بایک مقاومت خطی با مقاومت «منفی» R_0 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-پ) نشان داده شده است. در ناحیه ۳، یعنی آنجائیکه $E_2 < v < \infty$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی با شیب مثبت $\frac{1}{R_2}$ که محور i_R را در نقطه‌ای بعرض $-I_2$ قطع میکند (توجه کنید $I_2 > 0$ است) تقریب میکنیم. بنابراین مقاومت غیر خطی در ناحیه ۳ را میتوان با اتصال موازی یک مقاومت خطی با مقاومت مثبت R_2 و یک منبع جریان ثابت I_2 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-ت) نشان داده شده است. بسته به ولتاژ دوسر مقاومت غیر خطی، یکی از سه مدار معادل تقریبی شکل (۳-ه) را بایستی بکار برد.

با آشنایی که به تجزیه و تحلیل مدارهای RLC «خطی» موازی مرتبه دوم داریم، میتوان بهسولت مشخصه‌های مدار را در هر یک از سه ناحیه مقاومت غیر خطی تعیین نمود. مسأله بعدی ما تعیین رفتار مدار در مرزهای^(۱) دو ناحیه خواهد بود. گیریم که حالت اولیه مدار $i_L = 2$ و $v = 0$ باشد که فرض میشود در ناحیه ۲ قرار گیرد. مدار RLC خطی موازی را که در آن مقاومت خطی و اکتیو است میتوان (مانند بخش قبل) تجزیه و تحلیل نمود. مسیر، برای این مدار خطی از (۲، ۰) شروع شده و از مبدأ دور میشود و وقتی که $t \rightarrow \infty$ چون مدار ناپایدار است، مسیر باید به بینهایت برسد. معه‌ذا در لحظه t_1 مسیر به نقطه‌ای میرسد که در آن E_2 یا $E_1 = -v(t_1)$ بوده و تقریب مقاومت منفی دیگر معتبر نخواهد بود. پس از اینکه مسیر از نقطه $[v(t_1), i_L(t_1)]$ میگذرد، در ناحیه ۱ و یا در ناحیه ۳ خواهیم بود و برای نمایش دستگاه لازم است ترکیب مقاومت پسو خطی و منبع جریان ثابت بکار برده شود. بنابراین، بسته

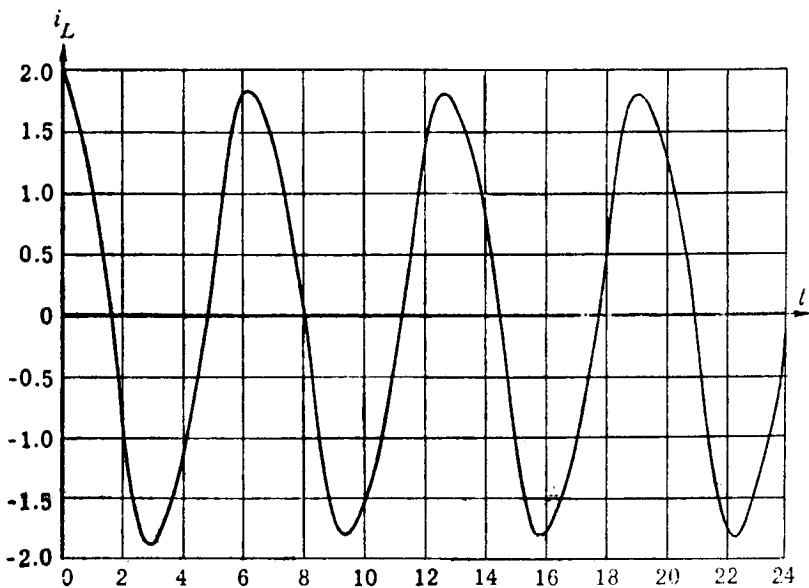
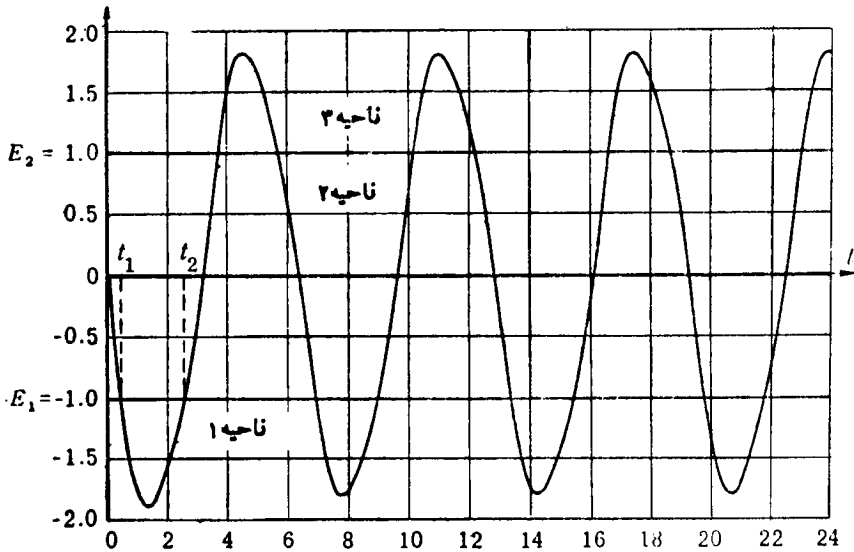
باینکه $v(t_1)$ مساوی $-E_1$ یا $+E_2$ باشد، مدار از تقریب خطی تکه‌ای شکل (۳-۵) پ) به شکل (۳-۵) ب) یا شکل (۳-۵) ت) برمیگردد.

فرض کنید شکل موج واقعی ولتاژ مطابق شکل (۳-۵) باشد. در زمان $t=0$ دستگاه در ناحیه ۲ است و در $t=t_1$ ولتاژ بمقدار $-E_1$ میرسد. بنابراین برای $t > t_1$ دستگاه در ناحیه ۱ است و بایستی مدار شکل (۳-۵) ب) را بکار برد و پاسخ کامل را



شکل ۳-۵- تقریب خطی تکه‌ای نومان ساز غیر خطی

برای حالت اولیه داده شده $(v(t_1), i_L(t_1))$ ، که در آن $v(t_1) = -E_1$ است محاسبه نمود. پاسخ را میتوان به‌سهولت با مدار معادل خطی شکل (۳-۵) ب محاسبه



شکل ۴-۵- شکل موجهای v و i_L برای تقریب نشان داده شده در شکل (۳-۵)،

در اینجا $E_1 = E_2 = 1$ ولت است

کرد. این پاسخ در شکل (۵-۴) که در آن v و i_L برحسب زمان رسم شده‌اند نشان داده شده است. در $t = t_p$ مجدداً ولتاژ $v(t_p) = -E_1$ است و برای $t > t_p$ به عمل در ناحیه ۲ برمیگردد، پس باید مدار معادل شکل (۵-۳) را بکار برد. بنابراین پاسخ مدار اکتیو شکل (۵-۳) با حالت اولیه داده شده $(i_L(t_p), v(t_p))$ را که در آن $v(t_p) = -E_1$ است محاسبه میکنیم. دستگاه سپس در ناحیه ۳ کار کرده و پس از آن مجدداً به ناحیه ۲ برمیگردد. با ادامه این عمل، شکل موجهای ولتاژ و جریان بالاخره بیک حالت دائمی، یعنی یک رفتار تناوبی همچنانکه در شکل نشان داده شده است میرسند. در فضای حالت قسمتی از مسیر را که یک منحنی بسته باشد سیکل حد نامند.

مثال ۲- مدار LC موازی خطی شکل (۵-۵) را در نظر بگیرید که در آن خازن تغییر ناپذیر با زمان، ولی سلف تغییر پذیر با زمان است معادله KCL چنین است:

$$i_L + i_C = i_s \quad (5-8)$$

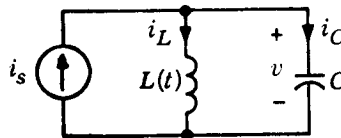
گیریم شار بعنوان متغیر شبکه بکار رود، در اینصورت:

$$i_L(t) = \frac{\Phi(t)}{L(t)} \quad (5-9)$$

$$v = \frac{d\Phi}{dt} \quad (5-10)$$

برای خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم:

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad (5-11)$$



شکل ۵-۵- مدار خطی تغییر پذیر با زمان، خازن C تغییر ناپذیر با زمان است ولی سلف

$L(t)$ با زمان تغییر میکند

از ترکیب این چهار معادله، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم که در آن Φ متغیر وابسته است بدست می‌آید. بنابراین:

$$(۵-۱۲) \quad C \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{\Phi}{L(t)} = i_s(t)$$

اگر $L(t)$ یک تابع تناوبی بصورت زیر باشد:

$$(۵-۱۳) \quad L(t) = \frac{1}{a + b \cos \omega_1 t}$$

که در آن a و b هردو ثابت بوده و $b < a$ است، معادله (۵-۱۲) بصورت معادله معروف ماتیو درسی‌آید و چنانچه ω_1 بطور مناسبی انتخاب گردد میتوان نشان داد که نوسالی با دامنه افزایشی نامایی در مدار حاصل میشود. این پدیده را «نوسان پارامتری»^(۱) گویند. انرژی نوسان افزایشی توسط عاملی که موجب تغییر اندوکتانس میشود فراهم میگردد. در دوره‌های اولیه رادیو برای فراهم کردن اندوکتانس تغییر پذیر نوسان ساز از آلترناتورها^(۲) استفاده میشد. بحث درباره جزئیات این مطلب در فصل نوزدهم داده شده است.

اکنون همان مدار را از نقطه نظر فضای حالت در نظر میگیریم و بار q خازن و شار Φ سلف را بعنوان متغیرهای وابسته بکار می‌بریم. از ترکیب معادلات (۵-۸) و (۵-۹) داریم:

$$(۵-۱۴) \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\Phi}{L(t)} + i_s(t)$$

از ترکیب معادلات (۵-۱۰) و (۵-۱۱) داریم:

$$(۵-۱۵) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{C}$$

و بصورت ماتریسی داریم:

$$(۵-۱۶) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L(t)} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i_s(t)$$

با حالت اولیه :

$$(۱۷-۰) \quad \begin{bmatrix} q(0) \\ \Phi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \Phi \end{bmatrix}$$

میتوان مجدداً معادلات را با بکار بردن روش انتگرال گیری مرحله بمرحله بطور عددی حل نمود.

۶- مدارهای دوگانه و تشابهی

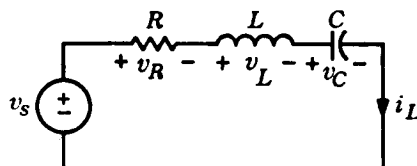
۶-۱- دوگانی

تاکنون مدارهای مرتبه دوم خطی، غیرخطی، تغییرناپذیر و تغییرپذیر با زمان را در نظر گرفتیم ولی خود رابه مدارهای RLC موازی محدود ساختیم. فرض کنید مثال ساده دیگری مانند مدار RLC سری را در نظر بگیریم. رفتار این مدار بطور دقیقی با رفتار مدار RLC موازی مربوط میشود.

مدار شکل (۶-۱) را که در آن اتصال سری یک مقاومت، سلف و خازن خطی تغییرناپذیر با زمان توسط یک منبع ولتاژ تحریک میشود در نظر بگیرید. تجزیه و تحلیل این مدار مشابه تجزیه و تحلیل مدار RLC موازی است. میخواهیم پاسخ کامل مدار یعنی پاسخی که ناشی از ورودی و حالت اولیه میباشد را تعیین کنیم. ابتدا لازم است معادله دیفرانسیلی برحسب یکی از سادهترین متغیرهای شبکه بدست آوریم. برای هر یک از سه شاخه، ولتاژ و جریان شاخه توسط معادله آن شاخه بهم مربوط میشوند. متغیرهای جریان بایستی در محدودیت های KCL صدق کنند یعنی :

$$(۱-۶) \quad i_L = i_R = i_C$$

در حالیکه متغیرهای ولتاژ بایستی محدودیت های KVL را برآورند:



شکل ۶-۱- مدار RLC سری با ورودی منبع ولتاژ

$$(۱-۲) \quad v_L + v_R + v_C = v_s$$

بنابراین معادله انتگرال دیفرانسیل زیر برحسب جریان حلقه (که با i_L مشخص شده) خواهیم داشت:

$$(۱-۳) \quad L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' = v_s$$

با شرط:

$$(۱-۴) \quad i_L(0) = I_0$$

اکنون میتوان معادلات (۱-۳) و (۱-۴) را برحسب i_L حل نمود. معه‌ذا اگر ولتاژ v_C متغیر مورد توجه باشد، معادله فوق بیک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تبدیل میشود و تنها لازم است که معادلات شاخه‌ها:

$$(۱-۵) \quad v_C = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' \quad i_L = C \frac{dv_C}{dt}$$

در (۱-۳) جایگزین گردد. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم چنین است:

$$(۱-۶) \quad LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s$$

با شرایط اولیه:

$$(۱-۷) \quad v_C(0) = V_0$$

و:

$$(۱-۸) \quad \frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i_L(0)}{C} = \frac{I_0}{C}$$

معادلات (۱-۶) تا (۱-۸) برای تمام مقادیر $t \geq 0$ ولتاژ خازن را کاملاً معین میکنند.

میتوان به‌سہولت تشابه میان تجزیه و تحلیل مدار RLC «سری» و مدار RLC «سوزی» را تشخیص داد. در واقع اگر تغییرات سازگاری در طرز نمایش معرفی کنیم، میتوان به معادلات همانندی رسید. شاید از معادلات (۱-۶) تا (۱-۸) تاکنون متوجه شده باشیم که ولتاژ خازن در مدار RLC سری همان نقش جریان سلف در مدار RLC

موازی را ایفا میکند [معادلات (۷-۱) تا (۹-۱) را ببینید] ، بنابراین چنانچه تغییر و تبدیل مناسبی بکار رود حل مدار RLC سری را میتوان از روی حل مدار RLC موازی بدست آورد. این مفهوم را که معمولاً «دوگانی^(۱)» نامند در مثالهای زیر تشریح میکنیم. بحث جزئیات آن در فصل دهم داده خواهد شد.

مثال ۱- مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (۲-۶) را در نظر بگیرید. میخواهیم آنرا با مدار RLC سری شکل (۱-۶) مقایسه کنیم. برای تعایز میان طرز نمایش و سیمبلیهای مدارهای سری و موازی علامت «کلاه^(۲)» ($\hat{\cdot}$) را برای مشخص کردن تمام پارامترها و متغیرهای مدار موازی بکار می‌بریم. مثلاً با نوشتن معادله KVL برای مدار سری بدست می‌آید:

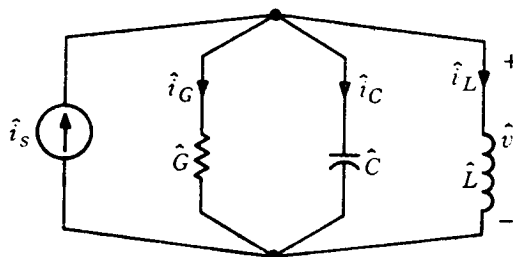
$$v_s = v_L + v_R + v_C$$

$$v_s = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + v_C(0)$$

بطریق مشابه، با نوشتن معادله KCL برای مدار موازی بدست می‌آید:

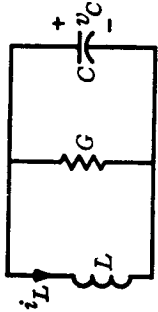
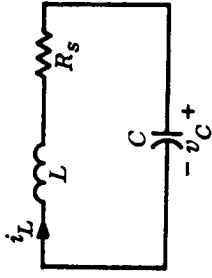
$$\hat{i}_s = \hat{i}_C + \hat{i}_G + \hat{i}_L$$

$$\hat{i}_s = \hat{C} \frac{d\hat{v}}{dt} + \hat{G} \hat{v} + \frac{1}{\hat{L}} \int_0^t \hat{v}(t') dt' + \hat{i}_L(0)$$



شکل ۲-۶- مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

جدول ۵-۱- پاسخ ورودی صفر يك مدار مرتبه دوم

 $i_L(0) = I_0$ $v_C(0) = V_0$ $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$	 $i_L(0) = I_0$ $v_C(0) = V_0$ $\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0$
$Q \triangleq \omega_0 / 2\alpha$ $\left. \begin{aligned} \omega_0 &\triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q &\triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{C/L}}{G} = \omega_0 CR \\ \alpha &\triangleq \frac{G}{2C} \end{aligned} \right\}$	مردم داده نرم یکسان ω_0 و α را دارند. رادمان $\frac{dx}{dt} + \alpha x = \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ $\left. \begin{aligned} \omega_0 &\triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \alpha &\triangleq \frac{R_s}{2L} \end{aligned} \right\} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s} = \frac{\omega_0 L}{R_s}$
حالات $\alpha > \omega_0$ یا $Q < 1/2$. حالات میرای شدید $(s_1 = -\alpha + \alpha_d, s_2 = -\alpha - \alpha_d)$ در آنجا $\alpha_d \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$	
$i_L(t) = \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{V_0}{(s_1 - s_2)L} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$ $v_C(t) = I_0 \frac{s_1 s_2 L}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$	$v_C(t) = \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{(s_1 - s_2)C} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$ $i_L(t) = V_0 \frac{s_1 s_2 C}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$

۲ حالت $\alpha = \omega_0$ or $Q = \frac{1}{2}$. حالت میرای بحرانی ($s_1 = s_2 = -\alpha$)

$$i_L(t) = I_0(1 + \omega_0 L)e^{-\omega_0 t} + \frac{V_0}{\omega_0 L} \omega_0 L e^{-\omega_0 t}$$

$$v_C(t) = -I_0 \omega_0^2 L t e^{-\omega_0 t} + V_0(1 - \omega_0 L) e^{-\omega_0 t}$$

$$v_C(t) = V_0(1 + \omega_0 L)e^{-\omega_0 t} + \frac{I_0}{\omega_0 C} \omega_0 L e^{-\omega_0 t}$$

$$i_L(t) = -V_0 \omega_0^2 C t e^{-\omega_0 t} + I_0(1 - \omega_0 L) e^{-\omega_0 t}$$

۳ حالت $\alpha < \omega_0$ or $Q > \frac{1}{2}$. حالت میرای قسیف که $\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ و $\sin \phi = \frac{\alpha}{\omega_0}$

$$i_L(t) = I_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + \frac{V_0}{\omega_0 L} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$v_C(t) = -I_0 \frac{\omega_0^2 L}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + V_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

$$v_C(t) = V_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + \frac{I_0}{\omega_0 C} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$i_L(t) = -V_0 \frac{\omega_0^2 C}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + I_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

۴ حالت $\alpha = 0$ or $Q = \infty$. حالت بدون اتلاف ($s_1 = j\omega_0, s_2 = -j\omega_0$)

$$i_L(t) = I_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t$$

$$v_C(t) = -I_0 \omega_0 L \sin \omega_0 t + V_0 \cos \omega_0 t$$

$$v_C(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t$$

$$i_L(t) = -V_0 \omega_0 C \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t$$

اکنون فرض کنید که $L = \hat{C}$ و $R = \hat{G}$ و $C = \hat{L}$ و $v_C(0) = \hat{i}_L(0)$ باشد. در این صورت دو معادله دارای ضرایب یکسان بوده و تنها از لحاظ طرز نمایش باهم متفاوت اند. بالتجیه اگر برای تمام مقادیر $t \geq 0$ ، روابط $i(0) = \hat{v}(0)$ و $v_s(t) = \hat{i}_s(t)$ نیز برقرار باشد، پاسخ‌ها یکسان خواهند بود، یعنی برای تمام مقادیر $t \geq 0$ ، $i(t) = \hat{v}(t)$ است. این دو مدار را «دوگان»^(۱) نامند. بویژه هر دو مدار پاسخ‌های ضربه و پله همانند خواهند داشت. لیست پاسخ‌های ورودی صفر هر مدار در جدول (۱-۵) داده شده است.

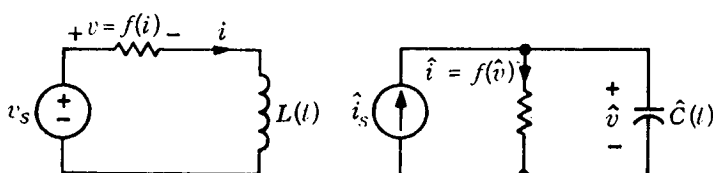
مثال ۲- برای اینکه دو مدار دوگان باشند، لازم نیست که حتماً «خطی» و «تغییر ناپذیر با زمان» باشند. دو مدار شکل (۶-۳) را در نظر بگیرید. سلف خطی تغییر پذیر با زمان مدار اول برای هر مقدار t با شیب مشخصه $L(t)$ آن مشخص میشود. بطریق مشابه خازن خطی تغییر پذیر با زمان مدار دوم با $\hat{C}(t)$ مشخص میگردد. مقاومت غیر خطی مدار اول با تابع $f(\cdot)$ مشخص میشود که منحنی آن همان مشخصه مقاومت است که در آن v برحسب i رسم میشود. مقاومت غیر خطی مدار دوم بوسیله همان منحنی مشخص میشود، بشرطیکه در مشخصه آن $\hat{i}$ برحسب $\hat{v}$ رسم گردد (به تعویض جریان و ولتاژ توجه کنید). بعبارت دیگر، هر دو مقاومت دارای مشخصه‌هایی هستند که با یک منحنی توصیف میگردد بشرطیکه مشخصه اول در صفحه $i\hat{v}$ و مشخصه دوم در صفحه $\hat{i}\hat{v}$ رسم شده باشند. اگر جریان داخل مقاومت اول i باشد ولتاژ دوسر آن $f(i)$ بوده، و اگر ولتاژ دوسر مقاومت دوم $\hat{v}$ باشد جریان داخل آن $f(\hat{v})$ است. برای مدار سری با استفاده از KVL داریم:

$$v_s(t) = \frac{d}{dt} [L(t)i(t)] + f(i(t))$$

برای مدار موازی با استفاده از KCL داریم:

$$\hat{i}_s(t) = \frac{d}{dt} [\hat{C}(t)\hat{v}(t)] + f(\hat{v}(t))$$

فرض کنید که برای هر مقدار $t \geq 0$ ، $L(t) = \hat{C}(t)$ باشد. در این صورت دو معادله



شکل ۳-۶ دو مدار دوگان، توجه کنید که مقاومت‌ها غیر خطی هستند

بالا دارای شکل یکسان بوده و این دو مدار، «دوگان» خوانده میشوند. بالنتیجه چنانچه حالت‌های اولیه یکسان بوده $[i(0) = \hat{v}(0)]$ و ورودی‌ها نیز دارای شکل موج مشابه باشند [برای همه مقادیر $t \geq 0$ ، $v_s(t) = \hat{v}_s(t)$ ، پاسخ‌ها همانند خواهند بود، یعنی شکل موج $i(0)$ که برای $t \geq 0$ تعریف میشود همانند شکل موج $\hat{v}(0)$ است که برای $t \geq 0$ تعریف میگردد.

اکنون این دو مثال را بررسی نموده و مشاهده میکنیم که میان آنها تناظرهای یک‌یک زیادی وجود دارد. معادله KVL یک مدار، متناظر با معادله KCL مدار دیگر است. حلقه یکی از مدارها متناظر با گرهی از مدار دیگر است. جدول زیر اصطلاحات دوگان نوعی را نشان میدهد.

KVL	KCL
جریان	ولتاژ
حلقه	گره همراه با دسته شاخه‌هایی که بان گره وصل‌اند
اجزاء بطور سری	اجزاء بطور موازی
سلف	خازن
مقاومت	مقاومت
منبع ولتاژ	منبع جریان

توجه باین نکته حایز اهمیت است که پاره‌ای از این تناظرها به «خواص گراف»^(۱) مربوط بوده درحالیکه برخی دیگر به «ماهیت شاخه‌ها» مربوط است. بنابراین در وجود آوردن دوگانی باید مفهوم گراف‌های دوگان نیز معرفی شود. بحث کامل این موضوع در فصل دهم داده خواهد شد. در حال حاضر میخواهیم تنها روی این حقیقت تأکید کنیم که مفهوم دوگانی در نظریه مدارها اهمیت زیادی دارد و میتوان جزئیات بسیاری از مدارها را بشرطیکه خصوصیات مدار دوگان معلوم باشد بدون تجزیه و تحلیل بخوبی درک کرد. در ضمن درس، گاه‌آ از مفهوم دوگانی استفاده خواهیم کرد.

۶-۲- تشابه‌های الکتریکی و مکانیکی

ما در مکانیک کلاسیک با حرکت‌های هارمونیک ساده، نوسانی میرا و نمایی میرا برخورد کرده‌ایم که کاملاً مشابه آنچه که تا بحال در این درس مطالعه کرده‌ایم میباشد. اکنون اجزاء اساسی مکانیکی و طرز تشکیل معادلات در سیستم‌های مکانیکی را مرور نموده و تشابه آنها را با مدارهای الکتریکی بررسی میکنیم.

مثال ۳- سیستم مکانیکی شکل (۶-۴) را در نظر بگیرید که در آن جسمی بجرم M بوسیله فنری با ضریب فنریت^(۲) K بدیوار بسته شده است. این جسم توسط نیرویی که با f_s مشخص می‌شود کشیده میشود. سطح تماس میان جسم و زمین دارای نیروی مالشی است که حرکت جسم را کند می‌نماید و در هر لحظه از زمان در خلاف جهت سرعت اثر میکند. میتوان معادله حرکت جسم را با استفاده از دیاگرام جسم آزاد^(۳) مطابق شکل (۶-۴) نوشت. فرض کنید f_K نیرویی باشد که فنر روی جسم اعمال میکند و گیریم f_B نیروی مالشی باشد، در این صورت نیروی کل که روی جسم اثر میکند مساوی $f_s - f_K - f_B$ است و این نیرو بموجب قانون نیوتن^(۴) مساوی مشتق مقدار حرکت است. بنابراین:

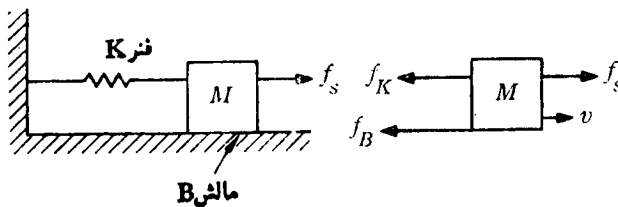
$$(۶-۹) \quad f_s - f_K - f_B = \frac{d}{dt} Mv$$

۱- Graph

۲- Spring Constant

۳- Free - body

۴- Newton



شکل ۴-۶- سیستم مکانیکی و دیاگرام جسم آزاد آن

که در آن v سرعت در جهت نیروی f_s است. این حقیقت بسیار معروف است که نیروی مالش تابعی از سرعت بوده و بصورت $f_B(v)$ مشخص میگردد، درحالیکه نیروی الاستیکی^(۱) تابعی از تغییر مکان^(۲) x است که با $f_K(x)$ بیان میشود. گیریم معادله (۶-۹) را مجدداً بصورت زیر بنویسیم:

$$(۶-۱۰) \quad f_s = f_K(x) + f_B(v) + \frac{d}{dt} Mv$$

اکنون اتصال سوازی یک مقاومت، یک سلف، یک خازن و یک منبع جریان i_s را در نظر میگیریم. میتوان معادله KCL را چنین نوشت:

$$(۶-۱۱) \quad i_s = i_L(\Phi) + i_R(\hat{v}) + \frac{d}{dt} C\hat{v}$$

که در آنجا $C\hat{v}$ بار خازن خطی است و

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \int_0^t \hat{v}(t') dt'$$

شار سلف غیر خطی است. $i_L(0)$ و $i_R(0)$ بترتیب جریان داخل سلف بصورت تابعی از شار و جریان داخل مقاومت بصورت تابعی از ولتاژ را نشان میدهند. در سیستم

مکانیکی $v = \frac{dx}{dt}$ سرعت است و

$$x = x(0) + \int_0^t v(t') dt'$$

تغییر مکان می‌باشد. بعلاوه، اگر $f_s = i_s$ ، $f_K = i_L$ ، $f_B = i_R$ و $M = C$ باشد دو معادله همانند بوده و مدار RLC سوازی را مشابه الکتریکی^(۱) می‌ستیم مکانیکی نامند. متغیر $\hat{v}$ (ولتاژ) در مدار تشابهی مانند متغیر مکانیکی v (سرعت) رفتار می‌نماید. "مفهوم تشابهی نظیر مفهوم دوگانی است بجز اینکه تشابه معمولاً"، تنها معادل بودن دینامیکی دو سیستم را لازم میدارد درحالیکه دوگانی بودن، علاوه بر این تشابه، ارتباط توپولوژیکی را نیز ایجاب میکند* برای بیان و درك بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، اغلب استفاده از ایده تشابهی مفید است زیرا افراد بسته به آموزش و تجربه خود همواره با نوعی از این سیستم‌ها آشنایی بیشتری دارند. چنانکه گفته شد مفهوم تشابهی تنها به سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان محدود نمیشود. متغیرها و اجزاء مشابه در جدول‌های زیر خلاصه شده‌اند.

سیستم‌های مکانیکی	مدارهای الکتریکی
نیرو f_s	جریان i_s
سرعت v	ولتاژ $\hat{v}$
تغییر مکان x	شار Φ
قعر	سلف
مالش	مقاومت
جرم	خازن

بعلاوه، چنانچه سه جزء اصلی خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشند، روابط تشابهی آشنای زیر بدست می‌آیند:

سیستم‌های مکانیکی	مدارهای الکتریکی
جرم $f = M \frac{dv}{dt}$	خازن $i = C \frac{d\hat{v}}{dt}$
مالش $f = Bv$	رسانا $i = G\hat{v}$
قشر $f(t) = f(0) + K \int_0^t v(t') dt'$	سلف $i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t \hat{v}(t') dt'$

این دسته از کمیت‌های تشابهی تنها دسته ممکن نمیباشند و بخصوص اگر بجای ارتباط دادن سیستم مکانیکی به مدار RLC «سوازی»، آنرا به مدار RLC «سری» مربوط می‌کردیم، دسته متفاوت دیگری از کمیت‌های مشابه بدست می‌آوردیم. مثلاً می‌توانستیم ولتاژ v_s را متناظر با نیروی f_s و جریان i_s را متناظر با سرعت v در نظر بگیریم.

خلاصه

● پاسخ‌های ورودی صفر مدارهای RLC پسوی خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم، مطابق جدول (۵-۱) (صفحه‌های ۲۹۴ و ۲۹۵) به چهار دسته طبقه‌بندی میشوند.

● پاسخ‌های ورودی صفر یک مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را میتوان برحسب مسیرهای حالت که در صفحه $i_L v_C$ برحسب پارامتر t رسم میشوند بیان نمود. حالت مدار در زمان t ، بردار $\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$ و حالت اولیه آن بردار

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix} \text{ است.}$$

● مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم (پسوی یا اکتیو) را میتوان نسبت به محل فرکانس‌های طبیعی و مساهیت مسیرهای حالت آن مطابق جدول (۵-۲) نیز طبقه‌بندی کرد.

جدول ۲-۵- طبقه بندی مدارهای RLC موازی خطی تغییر
ناپذیر با زمان

پسیو	بی اتلاف	آکتیو
$G = \frac{1}{R} > 0$	$G = \frac{1}{R} = 0$	$G = \frac{1}{R} < 0$
محل فرکانس‌های طبیعی	نیمه چپ صفحه s	نیمه راست صفحه s
مسیرهای حالت	پایدار مجانبی	نوسانی
	ناپایدار	

- روش فضای حالت در تجزیه و تحلیل مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان بسیار مفید است. معادلات بصورت $\dot{x} = f(x, w, t)$ هستند که در آن x حالت و w ورودی است و میتوان جواب را با محاسبه مرحله به مرحله بدست آورد.
- مفهوم مدارهای دوگان برای این حقیقت استوار است که معادلات توصیف کننده مدارهای دوگان شکل یکسانی دارند
- اگر یک سیستم مکانیکی مشابه یک مدار الکتریکی باشد، در اینصورت هردو با معادلاتی که شکل یکسانی دارند توصیف میگردند.

مسائل

- ۱- محاسبه عبارتهای نمایی با بکار بردن طرز نمایش بخش ۱ نشان دهید که :

$$\frac{d}{dt} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t = -\omega_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \Phi)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t = \omega_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \Phi)$$

- ۲- فرکانس‌های طبیعی فرض کنید که فرکانس‌های طبیعی یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان یکی از صورت‌های زیر باشد:

الف - $s_1 = -2$ و $s_2 = 2$

ب - $s_1 = s_2 = -2$

پ - $s_1 = j2$ و $s_2 = -j2$

ت - $s_1 = 2 + j2$ و $s_2 = 2 - j2$

برای پاسخ های ورودی صفر، عبارتهای کلی بصورت توابع زمانی با مقدار حقیقی بیان کنید.

۳- ضریب Q برای یک مدار RLC داده شده با $Q = 0.0$ چند پریود لازم است صبر شود تا پوش پاسخ ورودی صفر به مقدار ۱۰ درصد، ۱ درصد، ۰.۱ درصد حداکثر مقدار آن در پریود اول برسد (در هر مورد جوابی با تقریب حداکثر نیم پریود بدست آورید).

۴- ضریب Q دو مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که اولی یک مدار موازی با مقادیر اجزاء L ، R' و C و دومی یک مدار سری با مقادیر اجزاء R و L و C میباشد. اگر قرار باشد دو مدار Q یکسان داشته باشند چه رابطه ای بین R و R' وجود دارد؟ و تئیکه $Q \rightarrow \infty$ ، چه اتفاق می افتد؟

۵- تعیین ثابت های دلخواه از روی شرایط اولیه با داشتن یک مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان با $\omega_0 = 10$ رادیان بر ثانیه و $Q = \frac{1}{4}$ و $C = 1$ فاراد، معادله دیفرانسیل را بنویسید. پاسخ ورودی صفر برای ولتاژ و دوسر خازن را تعیین کنید. شرایط اولیه $v_C(0) = 2$ ولت و $i_L(0) = 0$ آمپر میباشد.

۶- پاسخ های پله و ضربه برای مدار RLC موازی مسأله ه فرض کنید ورودی یک منبع جریان i_s باشد که بطور موازی بآن وصل شده است. پاسخ پله و پاسخ ضربه برای ولتاژ v_C را تعیین کنید.

۷- پاسخ کامل منبع جریان i_s رابطه موازی با مدار RLC مسأله ه وصل میکنیم و گیریم $i_s(t) = u(t) \cos 2t$ باشد. پاسخ حالت صفر و پاسخ گذرا را تعیین کنید.

۸- پاسخ حالت دائمی سینوسی، پاسخ گذرا و پاسخ کامل برای مدار RLC موازی مسأله ه گیریم که ورودی منبع جریان $i_s(t) = u(t) \cos 2t$ باشد که بطور موازی بان وصل شده است. برای شرایط اولیه $v_C(0) = 2$ ولت و $i_L(0) = 0$ آمپر پاسخ کامل را تعیین کنید. جزء گذرا و جزء حالت دائمی را صریحاً مشخص سازید و نشان دهید که پاسخ کامل، مجموع پاسخ ورودی صفر مسأله ه و پاسخ حالت صفر مسأله و می باشد.

۹- حذف حالت گذرا منبع جریان i_s را بطور موازی با مدار RLC مسأله ه وصل میکنیم و گیریم $i_s(t) = u(t) \cos 2t$ باشد. آیا ممکن است شرایط اولیه را چنان انتخاب نمود که حالت گذرای موجود نباشد؟ در چنین صورتی شرایط اولیه لازم را تعیین کنید، در غیر این صورت جواب خود را توجیه نمایید.

۱۰- حل معادلات دیفرانسیل معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = e^{-2t}, \quad x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = -1 \quad \text{الف -}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad \text{ب -}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1 \quad \text{پ -}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = tu(t), \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad \text{ت -}$$

۱۱- حل معادلات دیفرانسیل ماتریسی و مسیرهای حالت معادلات

دیفرانسیل ماتریسی زیر را باروش تقریب متوالی حل کنید و مسیرهای حالت را رسم نمایید:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

۱۲- پاسخ ضربه و تعویض منبع مدار RLC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان با $\omega_0 = 1$ رادیان بر ثانیه و $Q = 10$ داده شده است. ورودی منبع ولتاژی است که بطور سری با سلف وصل شده است. برای ولتاژ v_C دو سر خازن، پاسخ ضربه را تعیین کنید (راهنمایی: از مدار معادل نرتن استفاده نمایید).

۱۳- پاسخ پله و پاسخ شیب برای مدار مسأله ۱۲، پاسخ پله و پاسخ شیب را تعیین کنید.

۱۴- خطی بودن پاسخ حالت صفر یک مدار RLC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان داده شده است. پاسخ حالت صفر به ورودی سینوسی $i_1(t) = u(t) \cos 2t$ چنین است:

$$v_1(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} + \cos(2t + 60^\circ) \quad t \geq 0$$

پاسخ کامل این مدار برای ورودی سینوسی $i_2(t) = 2u(t) \cos 2t$ ، و تئیکه مدار از حالت اولیه معینی شروع میکند چنین است:

$$v_2(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t} + 2\cos(2t + 60^\circ) \quad t \geq 0$$

اگر مدار با همان حالت اولیه شروع کند، پاسخ کامل را به ورودی سینوسی:

$$i_3(t) = u(t) \cos 2t$$

تعیین کنید.

۱۵- پاسخ ورودی صفر، معادله دیفرانسیل و مسیر حالت مدار شکل (مسأله ۱۰-۵) خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

الف - معادله دیفرانسیلی با متغیر وابسته v_C بنویسید و شرایط اولیه مناسب را برحسب توابعی از $i_L(0)$ و $v_C(0)$ بیان کنید (راهنمایی: با بکار بردن متغیرهای v_C و i_L معادله گره را در گره ① و معادله حلقه برای i_L را بنویسید).

ب - پاسخ ورودی صفر $i_L(0)$ و $v_C(0)$ را محاسبه کنید.

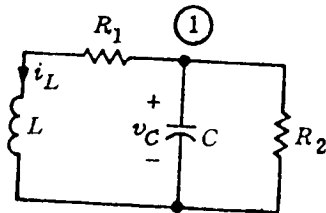
پ - پاسخ ورودی صفر را بصورت یک بردار حالت، $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix}$ بنویسید،

و مسیرهای حالت $\mathbf{x}_1(0)$ و $\mathbf{x}_2(0)$ متناظر با $\mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{x}_2(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

را که در آن i_L در امتداد محور طول ها و v_C در امتداد محور عرضها باشد رسم کنید.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

ت- آیا مسیر $\mathbf{x}_1(0)$ خاصیت ویژه‌ای دارد؟ کدام مسیرهای دیگر، در صورتیکه وجود داشته باشند، این خاصیت مشابه را دارا میباشند؟



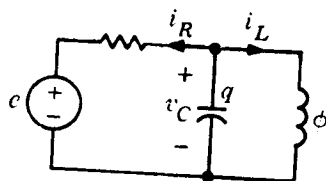
$$\begin{aligned} R_1 &= 4 \, \Omega & L &= 1 \, \text{H} \\ R_2 &= 2 \, \Omega & C &= \frac{1}{2} \, \text{F} \end{aligned}$$

شکل (مسئله ۵-۱۵)

۱۶- مسیر حالت مدار غیر خطی و انتگرال گیری تقریبی مدار RLC

غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسئله ۵-۱۶) عناصری دارد که چنین توصیف میشوند. $i_R = \alpha v_R$ ، $q = \beta v_C + \gamma v_C^2$ و $\Phi = \delta i_L$ که در آنجا $\alpha = 2$ مهو $\beta = 1$ فاراد، $\gamma = \frac{1}{4}$ فاراد بر ولت مربع و $\delta = \frac{1}{4}$ هانری است. منبعی که مدار را تحریک میکند ولتاژ $e(t) = \sin(0.2t)$ ولت را دارد و در زمان $t=0$ ولتاژ دو-رخازن $v_C(0) = 2$ ولت و جریان داخل سلف $i_L(0) = -2$ آمپر است. با بکار بردن $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ بعنوان بردار حالت، معادله حالت مدار را بنویسید و با استفاده از تقریب

خطی متوالی یعنی $\mathbf{x}[(n+1)\Delta t] \approx \mathbf{x}(n\Delta t) + \dot{\mathbf{x}}(n\Delta t)\Delta t$ با $\Delta t = 0.2$ ثانیه و $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ ، مسیر فضای حالت را رسم کنید. i_L و v_C را بصورت توابعی از زمان رسم کنید.



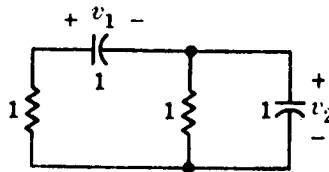
شکل (مسئله ۵-۱۶)

۱۷- تشکیل دادن معادلات دیفرانسیل و انرژی الف - در مدار شکل

(مسئله ۵-۱۷) معادلات دیفرانسیل را برای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ تشکیل دهید.

ب- گیریم $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{\gamma} [v_1(t) + v_2(t)]$ باشد. ثابت کنید برای همه

مقادیر t ، $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \leq 0$ است.



شکل (مسئله ۵-۱۷)

۱۸- مدارهای غیر خطی، معادلات بصورت نرمال و انرژی الف -

برای مدار غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان داده شده در شکل (مسئله ۵-۱۸) معادله دیفرانسیل

را بر حسب متغیرهای q و Φ بنویسید که در آن مشخصه سلف بصورت $i_L = \Phi + \Phi^2$

(Φ شار است) و مشخصه خازن بصورت $v_C = 2q$ (q بار است) داده شده است.

ب- گیریم در زمان t_0 مقادیر شار و بار ترتیب Φ_0 و q_0 باشند. انرژی ذخیره

شده در مدار چقدر است ؟

پ- گیریم در زمان t_0 ، $q=0$ و $\Phi=2$ باشد. برای $t \geq t_0$ حداکثر

مقدار $q(t)$ چقدر است ؟ (راهنمایی : آیا هیچ اتلاف انرژی در مدار وجود دارد؟)



شکل (مسئله ۵-۱۸)

۱۹- مشخص سازی حالت و مسیر حالت برای مدار RLC سری خطی

تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسئله ۵-۱۹) ، $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ را بعنوان بردار حالت بکاربرد

تنها اطلاعاتی که از اندازه‌گیری انجام شده این مدار در دست است، مشتق زمانی بردار حالت در دو مورد متفاوت میباشد یعنی :

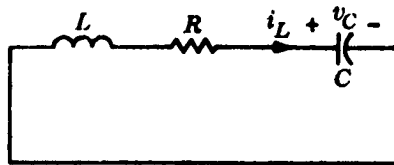
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{در} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{در}$$

الف - مقادیر اجزاء R و L و C را تعیین کنید.

ب - مشتق بردار حالت در $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ را با دو روش محاسبه کنید. اول ،

از معادله $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ استفاده کنید. دوم ، مشتق نامعلوم را با ترکیب خطی مناسب مشتق‌های داده شده مساوی قرار دهید.

پ - شیب $\frac{dv_C}{di_L}$ مسیر فضایی حالت را در $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ حساب کنید.



شکل (مسئله ۵-۱۹)

۲۰- پاسخ ضربه ، پاسخ کامل و حالت دائمی سینوسی مدار نشان داده

شده در شکل (مسئله ۵-۲۰) از اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان ساخته شده است. ولتاژ

e_s ورودی و ولتاژ v_C پاسخ آن است. مقادیر اجزاء $R_1 = 2$ اهم و $R_2 = 3$ اهم و $L = 1$ هنری و $C = 0.2$ فاراد میباشد.

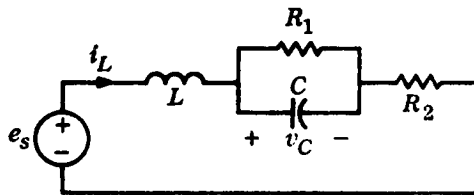
الف - پاسخ ضربه h را تعیین کنید.

ب - پاسخ کامل ناشی از ورودی $e_s(t) = u(t)$ و حالت اولیه $i_L(0) = 2$ آمپر

و $v_C(0) = 1$ ولت را محاسبه کنید.

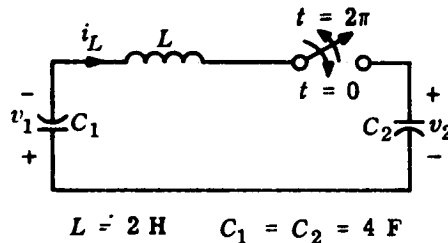
پ - برای ورودی $e_s = \cos 2t$ ، حالت دائمی سینوسی v_C ، i_L و v_{R_2} را

محاسبه و رسم نمایید. نتایج را بصورت توابع زمانی با مقدار حقیقی بیان کنید.



شکل (مسئله ۲۰-۵)

۲۱- مدار بی اتلاف و مسیر حالت مدار LC خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسئله ۲۱-۵) را در نظر بگیرید. قبل از زمان $t=0$ کلید باز بوده و ولتاژهای دوسر خازن ها بصورت $v_1=1$ ولت و $v_2=4$ ولت میباشند. در لحظه $t=0$ کلید را می بندیم و برای فاصله زمانی 2π ثانیه آنرا در این وضع نگاه میداریم و سپس در $t=2\pi$ ثانیه مجدداً آنرا باز کرده و پس از آن برای همیشه باز نگاه میداریم. برای $t > 2\pi$ ثانیه مقادیر v_1 و v_2 چقدر می باشد؟ مسیر حالت را در صفحه $i_L v_C$ رسم کنید $(v_C = v_1 + v_2)$. در مورد انرژی ذخیره شده در مدار پیش از زمان $t=0$ و پس از زمان $t=2\pi$ ثانیه چه میتوان گفت؟ (راهنمایی: نتایج انتخاب خاص این فاصله زمانی را تجزیه و تحلیل نمائید).



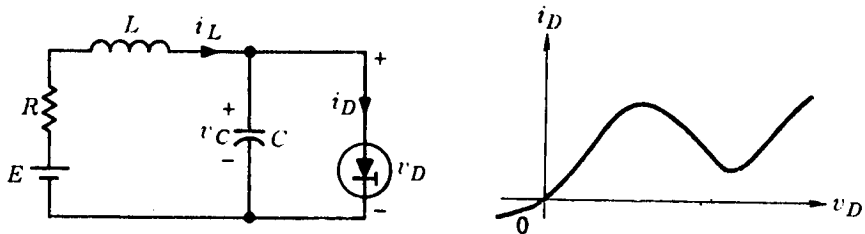
شکل (مسئله ۲۱-۵)

۲۲- مقاومت منفی و پاسخ ورودی صفر در مدار شکل (مسئله ۱۰-۵) مقاومت R_2 را به ۲ اهم تبدیل میکنیم.
الف - فرکانس های طبیعی مدار چیست؟
ب - چنانچه $i_L(0)=1$ آمپر و $v_C(0)=1$ ولت باشد پاسخ های ورودی صفر $i_L(0)$ و $v_C(0)$ را تعیین کنید.
پ - مسیر حالت را رسم کنید.

۲۳- مدار دوسمان دوگان مدار شکل (مسأله ۱۰-۵) را رسم کنید و مقادیر همه اجزاء آنرا مشخص سازید.

۲۴- تشابه مکانیکی و مدارهای دوسمان - برای سیستم مکانیکی شکل (۶-۴) دو مدار الکتریکی که مشابه‌های الکتریکی سیستم مکانیکی باشند رسم کنید.

۲۵- مدار غیر خطی و معادله دیفرانسیل بصورت نرمال مدار شکل (مسأله ۲۰-۵) یک نمونه مدار نوسان ساز دیود تونلی است. این دیود را بصورت مقاومتی که با مشخصه $i_D = g(v_D)$ معین میشود مدل میکنیم. معادله دیفرانسیل را بصورت نرمال با متغیرهای v_C و i_L بنویسید:



شکل (مسأله ۲۵-۵)

فصل ششم

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر بازمان

در دو فصل پیش مدارهای مرتبه اول و مرتبه دوم را مطالعه کردیم و بسیاری از مفاهیم و تکنیک‌های اساسی را بدست آوردیم. در این فصل ابتدا برخی از نتایج مهم را خلاصه نموده و آنگاه به تعمیم بعضی از آنها می‌پردازیم. سپس به بررسی مقدماتی تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل مش در مورد مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان خواهیم پرداخت و نشان خواهیم داد که نتایج این تجزیه و تحلیل منجر به توصیف ورودی - خروجی^(۱) بر مبنای یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت می‌گردد. همچنین روشی برای محاسبه پاسخ ضربه از معادله دیفرانسیل مرتبه n ام ارائه خواهد شد و آنگاه پاسخ‌های مربوط به ورودی‌های دلخواه را بررسی خواهیم کرد. بالاخره نمایش انتگرال کانولوشن^(۲) را دقیقاً بدست آورده و طرز محاسبه این انتگرال را با مثالهای متعدد روشن خواهیم ساخت.

۱- برخی تعاریف و خواص کلی

در فصل دوم سه جزء اصلی مدار یعنی، مقاوت، خازن و سلف را معرفی کردیم و یک طبقه بندی چهارگانه برای هر جزء قایل شدیم که عبارت بودند از: خطی بودن یا غیرخطی بودن، تغییرپذیر و یا تغییرناپذیر بازمان بودن.

برای تسهیل در بیان فرمول‌های آینده بازهم از این طبقه بندی چهارگانه یاد میکنیم. هر مدار با این خاصیت که هریک از اجزاء آن یک «عنصر خطی» و یا یک منبع ناپسته باشد یک مدار خطی نامیده میشود. به همین ترتیب هر مدار با این خاصیت که هریک از اجزاء آن یک «عنصر تغییرناپذیر بازمان» و یا یک منبع ناپسته باشد یک مدار تغییرناپذیر بازمان خواهد بود. بنابراین، یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان مداری است که هریک از اجزاء آن یک «عنصر خطی تغییرناپذیر بازمان» و یا یک منبع ناپسته

باشد. واضح است که اگر مداری خطی نباشد آنرا مدار غیر خطی و اگر مداری تغییرناپذیر با زمان نباشد، آنرا مدار تغییرپذیر با زمان نامند.

در این تعاریف، منابع وابسته بایستی بطور جداگانه مورد بررسی قرار گیرند زیرا (۱) ولتاژ دوسر یک منبع ولتاژ و جریان یک منبع جریان در تجزیه و تحلیل مدار نقشی را بازی میکنند که بانقش سایر متغیرهای شبکه و یا اجزاء دیگر مدار تفاوت دارد، و (۲) تمام منابع وابسته عناصر غیر خطی و تغییرپذیر با زمان هستند (مثلاً، یک منبع ولتاژ سینوسی میتواند بعنوان یک مقاومت غیر خطی تغییرپذیر با زمان مورد بررسی قرار گیرد زیرا مشخصه آن برای هر زمان i یک خط افقی در صفحه $i-v$ میباشد که عرض آن یک تابع سینوسی از زمان است، یعنی مشخصه آن خط راستی است که برای تمام زمانها از مبدأ «نمیگذرد»).

علاوه بر این بایستی تأکید نمود که مجموعه «تمام» ولتاژهای دوسر منابع ولتاژ وابسته و «تمام» جریانهای داخل منابع جریان وابسته بعنوان «ورودی‌های مدار» شناخته میشوند. بنابراین مداری که فقط شامل یک منبع وابسته باشد «مدار با یک ورودی» خوانده میشود. در این فصل، تنها مدارهای با یک ورودی و با یک خروجی را مورد بررسی قرار خواهیم داد، یعنی مدارهایی که فقط شامل یک منبع وابسته بوده و تنها یک متغیر (خروجی) است که باید محاسبه گردد. ورودی میتواند شکل موج ناشی از یک منبع ولتاژ وابسته و یا یک منبع جریان وابسته باشد. این شکل موج ممکن است بصورت یک ثابت، یک تابع پله، یک تابع ضربه، یک تابع سینوسی و یا هر تابع دلخواه دیگری از زمان باشد. خروجی که میتوان آنرا «پاسخ» مدار نیز نامید، میتواند بصورت ولتاژ یک شاخه بخصوص، جریان یک شاخه بخصوص و یا ترکیب خطی بعضی ولتاژ شاخه‌ها و جریان شاخه‌ها و یا بار روی یک خازن و یا شار^(۲) داخل یک سلف باشد.

برای تمام مدارهای فشرده که در این کتاب مورد بحث می‌باشند قادر خواهیم بود یک معادله دیفرانسیل و یا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل را بطریقی بنویسیم که از حل آنها تمام ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها محاسبه گردند.

برای اینکه بتوانیم جواب منحصر بفرد دستگاه معادلات دیفرانسیل را بدست آوریم باید علاوه بر ورودی‌ها، شرایط اولیه^(۲) را نیز دقیقاً بدانیم. نحوه بیان این شرایط اولیه بستگی به طرز

نوشتن معادلات دیفرانسیل خواهد داشت. بخصوص در فصل سیزدهم نشان خواهیم داد که اگر در لحظه اولیه، تمام ولتاژهای خازنها و جریانهای سلف‌ها معلوم باشند شرایط اولیه مطلوب بطور یکتا مشخص خواهند بود.

« هر مجموعه‌ی از شرایط اولیه که همراه با ورودی‌ها، برای تمام زمانهای $t \geq t_0$ ، تمام متغیرهای مدار را بطور یکتا مشخص سازد حالت مدار در زمان t_0 نامیده میشود. »

از بیان‌های فوق مشاهده میکنیم که حالت یک مدار در زمان t_0 همیشه میتواند مجموعه تمام ولتاژهای خازنها و جریانهای سلف‌ها در لحظه t_0 انتخاب شود. حالتی که در آن تمام شرایط اولیه صفر باشند حالت صفر^(۲) خوانده میشود. برای مدارهای خطی اگر تمام ورودی‌ها صفر بوده و مدار هم در حالت صفر باشد تمام متغیرهای شبکه از آن بعد برای همیشه صفر خواهند بود. وقتی ورودی در لحظه t_0 به مدار اعمال میشود، مجموعه شرایط اولیه در لحظه t_0 که برای یکتا مشخص نمودن متغیرهای شبکه لازم است، همانطور که قبلاً گفته شد، حالت مدار در لحظه t_0 خوانده میشود که بطور خلاصه آنرا « حالت اولیه^(۳) » میخوانیم. کلمه «اولیه» به حالت مدار در لحظه‌ای که ورودی اعمال میشود اشاره میکند.

پاسخ (خروجی) یک مدار را پاسخ حالت صفر^(۴) مینامیم اگر این پاسخ مربوط به مداری باشد که ورودی در لحظه دلخواه t_0 بآن اعمال شده و مدار قبل از اعمال این ورودی در حالت صفر بوده است (یعنی در لحظه t_0). همچنین پاسخ مداری را که ورودی آن بطور متحد، مساوی صفر باشد پاسخ ورودی صفر^(۵) خواهیم نامید. واضح است که پاسخ حالت صفر، تنها ناشی از ورودی آن است و بطریق مشابه، پاسخ ورودی صفر، تنها ناشی از شرایط اولیه می‌باشد. این پاسخ ناشی از انرژی ذخیره شده اولیه در مدار خواهد بود. پاسخ کامل^(۶) عبارت از پاسخ مدار به مجموع ورودی و شرایط اولیه خواهد بود.

در فصل‌های پیشی خواص مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان مرتبه اول و دوم را بررسی کردیم. بعداً خواهیم دید که این خواص برای هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان و یا تغییرپذیر با زمان نیز صادق است. برای مدارهای خطی (تغییرناپذیر یا تغییرپذیر با زمان) :

 ۱ — State of a circuit at time t_0

۲ — Zero state

۳ — Initial state

۴ — Zero-state response

۵ — Zero-input response

۶ — Complete response

۱- «پاسخ کامل» مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر میباشد.

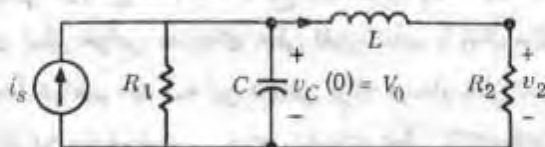
۲- «پاسخ حالت صفر» تابع خطی ورودی است.

۳- «پاسخ ورودی صفر» تابع خطی حالت اولیه میباشد.

۲- تجزیه و تحلیل گره و مش

درفصل سوم مدارهای ساده مقاومتی را که بصورت اتصال سری یا موازی عناصر بودند تجزیه و تحلیل نمودیم و برای آنها مدارهای معادلی بدست آوردیم. درفصل‌های چهارم و پنجم مدارهای شامل مقاومت، خازن و سلف را بررسی کردیم. این مدارها توپولوژی (۱) ساده‌یی داشتند بطوریکه یا مدار فقط شامل یک حلقه تنها بود که در اینصورت تنها یک معادله حلقه (KVL) رفتار مدار را مشخص میکرد و یا مدار فقط شامل دو گره بود که در اینصورت تنها یک معادله گره (KCL) رفتار مدار را مشخص مینمود. برای مدارهای با توپولوژی پیچیده لازم است روش‌های کلی و اصولی برای تجزیه و تحلیل آنها بدست آورد که این کار درفصل‌های نهم تا دوازدهم انجام شده است. در این بخش، مداری را که کمی مفصل‌تر از مداری است که درفصل پنجم مطالعه کردیم انتخاب میکنیم تا دو روش اساسی تجزیه و تحلیل مدار، یعنی تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل مش را تشریح نمائیم. برای شروع، مدار ساده شکل (۱-۲) را در نظر میگیریم که ورودی آن منبع جریان $i_L(t) = I_0$ و خروجی آن ولتاژ v_2 و دوسرمقاومت R_2 میباشد. حالت اولیه با $v_C(0) = V_0$ بیان شده و جهت‌های قرار دادی آنها در شکل نشان داده شده است.

$$i_L(t) = I_0$$



شکل ۱-۲- مثال ساده‌یی که تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل

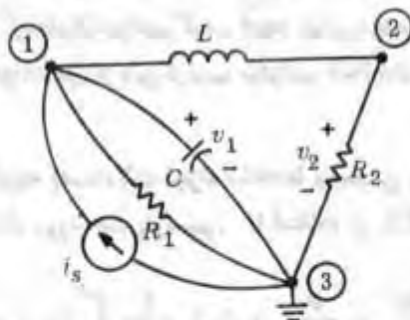
مش را تشریح میکند. منبع جریان i_s ، ورودی و

ولتاژ v_2 ، خروجی مدار میباشد.

۲-۱- تجزیه و تحلیل گره

اولین قدم در تجزیه و تحلیل گره شمارش تعداد گره‌های مدار می‌باشد. در این مورد سه گره وجود دارد که آنها را بصورت ① و ② و ③ علامت گذاری نموده ایم (به شکل (۲-۲) که تکرار شکل (۱-۲) بوده و برای تأکید گره‌ها می‌باشد مراجعه کنید).

واضح است که میتوان بین گره‌ها سه ولتاژ «جفت گره»^(۱) تعریف نمود که بترتیب v_{12} ، v_{23} ، v_{13} هستند. در اینجا این ولتاژها بترتیب ولتاژ شاخه‌هایی هستند که گره‌های ① و ②، ② و ③، ① و ③ را بهم وصل میکنند. از KVL میدانیم که مجموع ولتاژها در هر حلقه بایستی مساوی صفر باشد، بنابراین KVL یک محدودیت خطی میان ولتاژهای سه جفت گره ملزم می‌دارد. اگر $v_{13} = v_1$ و $v_{23} = v_2$ تعیین شود، $v_{12} = v_1 - v_2$ خواهد بود. معمولاً یک گره بنام «گره مبنا»^(۲) انتخاب میشود (بعضی اوقات گره مأخذ^(۳) و یا زمین هم خوانده شده و با علامت $\equiv$ مشخص میگردد). در اینصورت ولتاژ سایر گره‌ها نسبت باین گره مبنا را «ولتاژهای گره‌ها»^(۴) (یا ولتاژهای گره‌ها نسبت به مأخذ) مینامند. در مورد اخیر گره ③ بعنوان مبنا بوده و ولتاژهای گره‌ها v_1 و v_2 می‌باشند.



شکل ۲-۲- مدار شکل (۲-۱) مجدداً رسم شده است

تا علامت گذاری گره که اولین قدم تجزیه

و تحلیل گره است تأکید شود.

۱ — Node-pair

۲ — Reference node

۳ — Datum node

۴ — Node voltages

واضح است که سایر ولتاژهای جفت‌گره‌ها نیز برحسب ولتاژهای v_1 و v_2 با استفاده از قانون KVL قابل بیان هستند. بنابراین در حالت کلی اگر مداری دارای $n+1$ گره باشد، تعداد n ولتاژ گره بایستی مشخص گردد زیرا با دانستن آنها هر ولتاژ جفت‌گره و بویژه ولتاژهای شاخه‌ها بلافاصله تعیین می‌گردند. در بالا فقط از قانون ولتاژ کیرشف استفاده نمودیم ولی البته برای پیدا نمودن تمام ولتاژها و جریانهای شاخه‌ها و بخصوص پاسخ مطلوب، لازم است از قانون جریان کیرشف نیز استفاده شود.

حال استنباط‌های قانون جریان کیرشف را در این مدار بررسی می‌کنیم. البته برای اینکار میتوان سه معادله گره را برای گره‌های ① و ② و ③ نوشت، معهداً واضح است که یکی از سه معادله اضافی^(۱) خواهد بود، زیرا با افزودن هر دو معادله، معادله سوم نتیجه خواهد شد که ممکن است فقط در یک ضریب ۱- با آن اختلاف داشته باشد. بنابراین برای این مدار سه گره‌ی KCL، تنها دو معادله ناپسته گره به‌ا خواهد داد. با آسانی میتوان نشان داد که در مداری با $(n+1)$ گره، تنها n معادله ناپسته گره وجود خواهد داشت (البته این مطلب در فصل دهم نشان داده خواهد شد). برای صرفه‌جویی در وقت، بجای اینکه معادلات گره‌ها صریحاً برحسب جریانهای شاخه‌ها بنویسیم، از معادلات شاخه‌ها استفاده نموده و جریانها را مستقیماً برحسب ولتاژهای شاخه‌ها بیان می‌کنیم. همچنین تمام ولتاژهای شاخه‌ها را نیز برحسب ولتاژهای گره‌ها بیان خواهیم کرد. نتیجه نهایی، بدست آوردن دو معادله برای دو ولتاژ نامعلوم گره‌ها خواهد بود و باین ترتیب میتوانیم ولتاژهای هر دو گره و یا هر یک از آنها را بدست آوریم.

حال بی‌خواهیم با توجه به معادلات اجزاء شاخه‌ها و همچنین رابطه $v_{12} = v_1 - v_2$ دو معادله گره را برای مثال مورد بحث بنویسیم. با استفاده از KCL برای گره ① داریم،

$$(۲-۱) \quad C \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t (v_1 - v_2) dt' = i_s(t)$$

و برای گره ②،

$$(۲-۲) \quad -I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t (v_2 - v_1) dt' + \frac{v_2}{R_2} = 0$$

شرط اولیه اضافی داده شده چنین است :

$$(۲-۳) \quad v_1(0) = V_0$$

معادلات (۱-۲) و (۲-۲) دو معادله گره هستند که در آنها فقط دو ولتاژ گره v_1 و v_2 بعنوان متغیر ظاهر میشوند . معادله (۲-۳) یک شرط اولیه لازم برای مشخص نمودن یکتا جواب معادلات (۱-۲) و (۲-۲) میباشد .

هدف مسأله ما بدست آوردن یک معادله دیفرانسیل است که v_2 متغیر وابسته آن باشد . در فصل چهاردهم یک روش اصولی برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل از روی یک دستگاه معادلات انتگرال - دیفرانسیل^(۱) ارائه خواهد شد . در مورد مثال فوق ، ساده ترین روش اینست که ابتدا دو معادله (۱-۲) و (۲-۲) را با هم جمع کنیم تا داشته باشیم :

$$(۲-۴) \quad C \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = i_s$$

با مشتق گیری از معادله (۲-۲) بدست می آید :

$$\frac{1}{L} v_2 - \frac{1}{L} v_1 + \frac{1}{R_2} \frac{dv_2}{dt} = 0$$

و یا :

$$(۲-۵) \quad v_1 = v_2 + \frac{L}{R_2} \frac{dv_2}{dt}$$

با مشتق گیری از (۲-۵) داریم :

$$(۲-۶) \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} + \frac{L}{R_2} \frac{d^2 v_2}{dt^2}$$

معادله دیفرانسیل برای v_2 از جایگذاری (۲-۵) و (۲-۶) در (۲-۴) بدست می آید . بنابراین ،

$$(۲-۷) \quad LC \frac{d^2 v_r}{dt^2} + \left(R_r C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{dv_r}{dt} + \left(1 + \frac{R_r}{R_1} \right) v_r = R_r i_s$$

شرایط اولیه لازم برای یکتا مشخص نمودن جواب (۲-۷) را میتوان از معادله (۲-۳) و معادلات اصلی (یا معادل آنها) با قراردادن $t=0$ بدست آورد +. از (۲-۲) بدست می‌آوریم:

$$(۲-۸) \quad v_r(0) = R_r I_0$$

و از (۲-۵) داریم:

$$(۲-۹) \quad \frac{dv_r}{dt}(0) = \frac{R_r}{L} [v_1(0) - v_r(0)] = \frac{R_r}{L} (V_0 - R_r I_0)$$

تمرین - برای مدار شکل (۲-۲) معادله دیفرانسیلی که v_1 و v_2 را بهم ربط میدهد بدست آورید. شرایط اولیه لازم برای مشخص نمودن جواب یکتای معادله را نیز مشخص سازید.

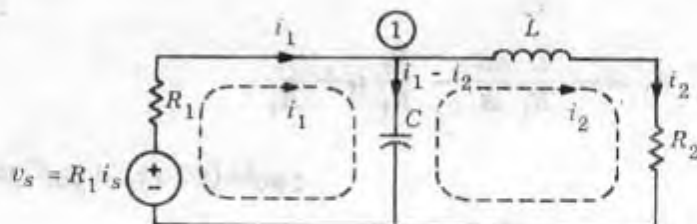
۲-۲- تجزیه و تحلیل مش

روش دیگری برای تجزیه و تحلیل یک شبکه کلی برپایه نوشتن معادلات مش^(۱) استوار است. مدار شکل (۲-۱) را که با استفاده از مدار معادل تونن ترکیب موازی i_2 و مقاومت، در شکل (۲-۳) دوباره رسم شده است در نظر میگیریم. داریم:

$$(۲-۱۰) \quad v_s = R_1 i_2$$

جریان در مش ۱ را (که شامل v_s و R_1 و C میباشد) با i_1 و جریان در مش ۲ را (که شامل C و L و R_r میباشد) با i_2 مشخص میکنیم. جریان واقعی شاخه‌های منبع v_s و مقاومت R_1 برابر i_1 است و جریان شاخه‌های شامل سلف L و مقاومت R_r برابر i_2 میباشد. جریان شاخه شامل خازن C ، مجموع جبری دو جریان مش، یعنی $i_1 - i_2$ میباشد. این موضوع با بکار بردن KCL در گره ① نیز آشکار است.

+ فرض میشود که i_2 تابع ضربه و یا تابع ویژه دیگری نمیشود. اگر i_2 شامل ضربه در $t=0$ باشد بایستی دقت بیشتری نمود. در این مورد میتوان از معادلات، بین $t=0_-$ تا $t=0_+$ انتگرال گرفت تا شرایط اولیه جدیدی در $t=0_+$ بدست آید.



شکل ۲-۳ - مدار شکل (۱ - ۲) برای تجزیه و تحلیل مش مجدداً رسم شده است. توجه کنید که منبع جریان شکل (۱ - ۲) با استفاده از مدار معادل تونن با منبع ولتاژ تعویض شده است.

حال KVL را در مشها بکار میگیریم. در روابط KVL، ولتاژ شاخه‌ها را صریحاً با استفاده از معادلات شاخه‌ها برحسب i_1 و i_2 بیان میداریم و بنابراین برای مش ۱ داریم:

$$(۲-۱۱) \quad R_1 i_1 + V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt' = v_s(t)$$

و برای مش ۲

$$(۲-۱۲) \quad L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i_1) dt' = 0$$

شرط اولیه اضافی داده شده چنین است:

$$(۲-۱۳) \quad i_2(0) = I_0$$

معادلات (۲-۱۱) و (۲-۱۲) معادلات مش مدار میباشند که در آنها تنها دو جریان مش i_1 و i_2 بعنوان متغیر داده میشوند. معادله (۲-۱۳) شرط اولیه لازم برای مشخص نمودن جواب بطور یکتا میباشد. برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل با متغیر خروجی v_2 تنها کافی است معادله دیفرانسیل مربوط به i_2 را بدست آوریم. ساده‌ترین راه، جمع کردن دو معادله (۲-۱۱) و (۲-۱۲) است تا بدست آوریم:

$$R_1 i_1 + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = v_s$$

و یا :

$$(۲-۱۴) \quad i_1 = -\frac{L}{R_1} \frac{di_r}{dt} - \frac{R_r}{R_1} i_r + \frac{v_s}{R_1}$$

با مشتق‌گیری از (۲-۱۲) داریم :

$$(۲-۱۵) \quad L \frac{d^2 i_r}{dt^2} + R_r \frac{di_r}{dt} + \frac{i_r}{C} - \frac{i_1}{C} = 0$$

با جایگذاری (۲-۱۴) در (۲-۱۵) بدست می‌آید :

$$(۲-۱۶) \quad LC \frac{d^2 i_r}{dt^2} + \left(R_r C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{di_r}{dt} + \left(1 + \frac{R_r}{R_1} \right) i_r = \frac{v_s}{R_1}$$

شرایط اولیه از رابطه (۲-۱۳) بدست می‌آید که چنین است :

$$(۲-۱۷) \quad i_r(0) = I_0$$

با قراردادن $t=0$ از (۲-۱۲) بدست می‌آید :

$$(۲-۱۸) \quad \frac{di_r}{dt}(0) = \frac{1}{L} (V_0 - R_r I_0)$$

چون $v_r = R_r i_r$ و $v_s = R_1 i_s$ ، معادله برحسب v_r و i_s چنین است :

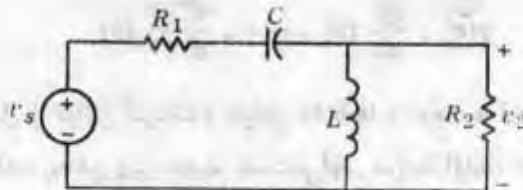
$$(۲-۱۹) \quad LC \frac{d^2 v_r}{dt^2} + \left(R_r C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{dv_r}{dt} + \left(1 + \frac{R_r}{R_1} \right) v_r = R_r i_s$$

وشرایط اولیه چنین می‌باشند :

$$(۲-۲۰) \quad v_r(0) = R_r I_0$$

$$(۲-۲۱) \quad \frac{dv_r}{dt}(0) = \frac{R_r}{L} (V_0 - R_r I_0)$$

مثال فوق این حقیقت کلی را نشان می‌دهد که برای هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان



شکل ۴-۲- مدار برای تمرین تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره
که در آن v_2 ورودی و v_1 پاسخ می باشد .

که دارای یک ورودی و یک خروجی باشد همیشه میتوان یک معادله دیفرانسیل بطریقی نوشت که خروجی را به ورودی ارتباط دهد . البته هرچه مدار پیچیده تر باشد ، کار بیشتری لازم خواهد بود . اما همانطور که در فصل های دهم و سیزدهم خواهیم دید برای این نوع مدارها روش های منظمی وجود دارد که ساده ترین معادله دیفرانسیلی که خروجی را به ورودی ارتباط میدهد به ما خواهد داد .

تمرین - با کاربردن تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره ، معادله دیفرانسیلی برای ولتاژ v_2 را در مدار شکل (۴ - ۲) بنویسید .

۳- نمایش ورودی - خروجی (معادله دیفرانسیل مرتبه n)

بطور کلی ، برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان با یک ورودی و یک خروجی ، رابطه بین خروجی و ورودی میتواند با یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام با ضرایب ثابت بیان شود ، بنابراین ،

$$(3-1) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \dots + b_m w$$

که در آنجا y نمایشگر خروجی و w نماینده ورودی می باشد . ثابت های $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_0, b_1, \dots, b_m$ به مقادیر عناصر و توپولوژی مدار بستگی دارند . شرایط اولیه چنین میباشند⁺ :

+ چنانکه بعداً خواهیم دید ، این مطلب صرفاً وقتی صحیح است که جمله $\frac{d^m w}{dt^m}$ شامل تابع ضربه $\delta(t)$ و یا هیچیک از مشتقهای آن نباشد .

$$y(0), \frac{dy}{dt}(0), \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)$$

معادله دیفرانسیل از قوانین کیرشف و خواص شاخه‌ها با توجه به تجزیه و تحلیل‌های گره و مش همانطور که در بخش پیش دیدیم بدست می‌آید. شرایط اولیه، از حالت اولیه داده شده مدار و همچنین معادلات مدار تعیین میشوند. روش کلی برای نوشتن معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام و تعیین شرایط اولیه در فصل‌های دهم و یازدهم و سیزدهم مورد بحث قرار خواهد گرفت. در حال حاضر فرض میکنیم که ارتباط بین ورودی و خروجی بصورت معادله (۳-۱) بیان شده و میخواهیم انواع پاسخ‌ها را مورد مطالعه قرار دهیم.

۳-۱- پاسخ ورودی صفر

پاسخ ورودی صفر عبارتست از پاسخ مدار وقتی که ورودی آن بطور متحد برابر صفر باشد. بنابراین سمت راست معادله (۳-۱) بطور متحد برابر صفر خواهد بود و عبارت دیگر، معادله دیفرانسیل همگن میباشد. چند جمله‌ای مشخصه^(۱) این معادله دیفرانسیل یک چند جمله‌ای از درجه n برحسب s میباشد:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

و صفرهای^(۲) این چند جمله‌ای، s_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ «فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکه y » نامیده میشوند. بخوبی معلوم است که اگر تمام فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند، جواب معادله همگن چنین خواهد بود:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \quad (3-2)$$

که در آنجا ثابت‌های k_i از شرایط اولیه داده شده تعیین میشوند. هرگاه بعضی از فرکانس‌های طبیعی مکرر شوند، معادله (۳-۲) را بایستی بطریقی اصلاح نمود تا توانهای t نیز چنانکه در ضمیمه ب بیان شده است در آن وارد گردد. بعنوان مثال، اگر s_1 ، صفر مرتبه سوم چند

جمله‌ی مشخصه معادله دیفرانسیل باشد، معادله (۳-۲) شامل :

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 t e^{s_1 t} + k_3 t^2 e^{s_1 t}$$

خواهد بود .

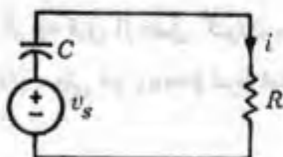
۳-۲- پاسخ حالت صفر

بطور کلی، پاسخ حالت صفر برای متغیر y در معادله (۳-۱) به شکل زیر می‌باشد (مجدداً فرض می‌شود تمام فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند) .

$$(۳-۳) \quad y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} + y_p(t)$$

که در آن $y_p(t)$ «یک» پاسخ خصوصی معادله (۳-۱) بوده و تنها به ورودی w بستگی خواهد داشت . n ثابت k_i با این شرط مشخص می‌شوند که تمام شرایط اولیه $y(0_-)$ ، $\frac{dy}{dt}(0_-)$ ، ... ، $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0_-)$ صفر باشند ، یعنی مدار درست در لحظه قبل از اعمال ورودی در حالت صفر باشد .

مثال - مدار RC شکل (۳-۱) را در نظر بگیرید که در آن v_s ورودی و جریانی که از مقاومت می‌گذرد، یعنی i ، خروجی است . درست در لحظه قبل از اعمال ورودی خازن بی‌بار می‌باشد . از لحظه $t=0$ بعد، ورودی $v_s(t) = V_m \cos t$ به مدار اعمال می‌شود . عبارت دیگر، می‌توان از تابع پله $u(\cdot)$ استفاده کرده و برای تمام زمانهای t ، $v_s(t) = u(t)V_m \cos t$ قرار داد . از قانون KVL بدست می‌آوریم :



شکل ۳-۱- یک مدار ساده RC

$$(۳-۴) \quad Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = v_s(t) = u(t) V_m \cos t$$

و یا :

$$(۳-۵) \quad R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dv_s}{dt}$$

توجه شود که (۳-۵) بصورت (۳-۱) میباشد. حال سمت راست (۳-۵) را محاسبه می‌کنیم. از اینرو،

$$\frac{dv_s}{dt} = V_m \frac{du}{dt} \cos t + V_m u(t) \frac{d}{dt} \cos t = V_m \delta(t) - V_m u(t) \sin t$$

وجود $V_m \delta(t)$ در سمت راست (۳-۵) موجب میشود که جریان i در لحظه $t=0$ ناپیوسته^(۱) گردد. درحقیقت برای اینکه مقدار سمت چپ معادله (۳-۵) ضربه $V_m \delta(t)$ سمت راست را متعادل کند، $R \left(\frac{di}{dt} \right)$ بایستی شامل ضربه $V_m \delta(t)$ باشد و بدین جهت i شامل $\left(\frac{V_m}{R} \right) u(t)$ خواهد بود که یک تابع پله‌است. از نظر فیزیکی، این مطلب بسهولت تشریح میگردد، چون شکل موج ولتاژ $v_s(t)$ کراندار است، ولتاژ دوسرخازن C و مقاومت R کراندار بوده و در نتیجه جریان i کراندار خواهد بود و بالاخره بار و ولتاژ دوسرخازن C پیوسته میباشد. از اینرو، $v_C(0_-) = v_C(0_+)$ و با استفاده از KVL داریم که :

$$v_R(0_+) = v_s(0_+) - v_C(0_+) = V_m$$

بعبارت دیگر،

$$i(0_+) = \frac{v_R(0_+)}{R} = \frac{V_m}{R}$$

بنابراین مشاهده میشود که اگر چه قبل از وصل کردن منبع ولتاژ v_s (یعنی در $t=0_-$) شرط اولیه صفر است، $i(0_-) = 0$ ، ولی در $t=0_+$ شرط اولیه صفر نبوده و به‌ورودی پستی خواهد داشت!

لازم است متذکر شویم که جمله m در (۳-۳) میتواند «هر» پاسخ خصوصی باشد، یعنی بموجب تعریف، هر جوابی که در معادله دیفرانسیل ناممکن (۳-۱) صدق نماید. بعضی پاسخ‌های خصوصی خیلی راحت‌تر از سایرین هستند. برای ورودی پله، m برابر یک ثابت اختیار میشود+. برای ورودی سینوسی، m بصورت یک سینوسی با همان فرکانس انتخاب میشود، و برای یک ورودی که یک چندجمله‌ای از t باشد، m بصورت یک چندجمله‌ای از t با همان درجه انتخاب میشود (به ضمیمه پ مراجعه گردد). در فصل بعد برای حالتی که ورودی سینوسی است، بطور مفصل بحث خواهیم نمود.

۳-۳- پاسخ ضربه

محاسبه پاسخ ضربه تا اندازه‌ی ظریف‌تر میباشد زیرا سمت راست (۳-۱) شامل ضربه‌ها و مشتق‌های ضربه‌ها خواهد بود. در این زیر بخش با استفاده از مثالی، محاسبه مستقیم پاسخ ضربه از معادله دیفرانسیل را تشریح خواهیم کرد. در بخش ۱ نشان خواهیم داد که تعیین پاسخ حالت صفر برای یک ورودی دلخواه، تنها به اطلاع از پاسخ ضربه بستگی دارد و بدین جهت بسیار مهم است که از پاسخ ضربه آسودگی خیال پیدا کرده و روش محاسبه آنرا بخوبی فراگیریم.

حال میخواهیم نشان دهیم که چگونه میتوان پاسخ ضربه را مستقیماً از روی معادله دیفرانسیل (۳-۱) بدست آورد:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 w^{(m)} + b_1 w^{(m-1)} + \dots + b_m w$$

با شرایط اولیه:

$$(۳-۶) \quad y(0_-) = y^{(1)}(0_-) = y^{(2)}(0_-) = \dots = y^{(n-1)}(0_-) = 0$$

برای سهولت طرز نمایش، بالانویس (1) (n) را برای نمایش $\frac{d^n}{dt^n}$ بکار برده‌ایم. واضح است

+ اگر در معادله دیفرانسیل، درجه m از درجه n بزرگتر باشد، آنگاه برای ورودی پله، m علاوه بر یک مقدار ثابت، بایستی شامل ضربه و بعضی مشتق‌های آن نیز باشد. این موضوع را بعداً بررسی خواهیم کرد.

که اگر ورودی w یک ضربه واحد باشد، سمت راست معادله شامل تابع ضربه و مشتقهای متوالی آن خواهد بود. مشتقهای متوالی تابع ضربه را گاه «توابع ویژه»^(۱) نیز میخوانند. از نظر نمایش داریم:

$$\frac{du}{dt} = \delta \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' = u(t)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \delta^{(1)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(1)}(t') dt' = \delta(t)$$

$$\frac{d\delta^{(1)}}{dt} = \delta^{(2)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(2)}(t') dt' = \delta^{(1)}(t)$$

$$\frac{d\delta^{(n)}}{dt} = \delta^{(n+1)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(n+1)}(t') dt' = \delta^{(n)}(t)$$

تعیین مستقیم پاسخ ضربه h براین پایه قرار گرفته است که توابع ویژه سمت راست باید با توابع ویژه سمت چپ معادله (۳-۱) متعادل باشند. چون در (۳-۱)، $w(t) = \delta(t)$ میباشد، بالاترین مرتبه تابع ویژه درست راست برابر $\delta^{(m)}$ بوده و چگونگی پاسخ ضربه h ، به مقدار نسبی m و n بستگی خواهد داشت.

۱- $n > m$ (حالت مناسب^(۲)). پاسخ ضربه h شامل هیچ نوع تابع ویژه‌ای نیست، اما چنانکه (۳-۱) لازم میدارد $\frac{d^n h}{dt^n}$ شامل $\delta^{(m)}$ میباشد.

۲- $n = m$. پاسخ ضربه h شامل یک ضربه $b_0 \delta$ خواهد بود (در اینجا، b_0 ضریب $w^{(m)}$ در معادله (۳-۱) میباشد).

۳- $n < m$. پاسخ ضربه h بیش از یک تابع ویژه را شامل می‌گردد و ضربی که برای هر تابع ویژه تعیین می‌شود به‌سبب از متعادل نمودن دوطرف معادله حاصل می‌گردد . در بحث جاری، خود را برای حالتی که $n > m$ می‌باشد محدود خواهیم کرد (حالت مناسب) . یادآوری می‌کنیم که بموجب تعریف، تابع ضربه $\delta(t)$ برای تمام زمانهای $t > 0$ بطور متحد مساوی صفر است و در نتیجه مشتقهای متوالی ضربه، یعنی توابع ویژه نیز دارای همین خاصیت خواهند بود . بنابراین برای ورودی ضربه واحد، سمت راست معادله (۳-۱) برای $t > 0$ بطور متحد مساوی صفر است و در نتیجه تا زمانی که $t > 0$ موردنظر می‌باشد، پاسخ ضربه، معادل پاسخ ورودی صفر خواهد بود. توابع ویژه درست راست (۱-۳) اساساً شرایط اولیه در $t = 0_+$ را مشخص می‌کنند، یعنی شرایطی، درست لحظه‌ای پس از اعمال ضربه می‌باشند. این شرایط چنین هستند:

$$h(0_+), h^{(1)}(0_+), \dots, h^{(n-1)}(0_+)$$

بنابراین، تا زمانی که $t > 0$ موردنظر می‌باشد، می‌توان پاسخ ضربه h را بهمان صورت جواب معادله همگن برحسب n ثابت اختیاری k_i بیان نمود. با فرض اینکه تمام ریشه‌های معادله مشخصه (۳-۱) متمایز باشند، خواهیم داشت:

$$(۳-۷) \quad h(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \quad t > 0$$

چون بموجب قرارداد، برای $t < 0$ ، $h(t) = 0$ می‌باشد و چون h هیچ تابع ویژه‌ای را شامل نمی‌گردد می‌توان نوشت (برای تمام t):

$$(۳-۸) \quad h(t) = \left(\sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \right) u(t)$$

کاری که باقی می‌ماند، گذاشتن (۳-۸) در معادله دیفرانسیل (۳-۱) و محاسبه n ثابت k_i می‌باشد. البته بایستی در مشتق‌گیری توابع ویژه دقت کافی مبذول گردد.

مثال - فرض کنید که معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده پاسخ y به ورودی w برای یک مدار داده شده بصورت زیر باشد:

$$(۳-۹) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = \frac{dw}{dt} + 2w$$

میخواهیم پاسخ ضربه h این مدار را بدست آوریم. توجه کنید در معادله $(۳-۹)$ ، $n=2$ و $m=1$ میباشد، از اینرو این حالت یک حالت متناوب میباشد و در نتیجه پاسخ ضربه هیچ نوع تابع ویژه‌ی را شامل نمیکردد. ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $(۳-۹)$ برابر، $s_1 = -1$ و $s_2 = -3$ است. بنابراین میتوان پاسخ ضربه را بصورت زیر نشان داد:

$$(۳-۱۰) \quad h(t) = (k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}) u(t)$$

با یکمرتبه مشتق گیری از h بدست می‌آید:

$$h^{(1)}(t) = (k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}) \delta(t) + (-k_1 e^{-t} - 3k_2 e^{-3t}) u(t)$$

$$= (k_1 + k_2) \delta(t) + (-k_1 e^{-t} - 3k_2 e^{-3t}) u(t)$$

با یکمرتبه دیگر مشتق گیری بدست می‌آید:

$$h^{(2)}(t) = (k_1 + k_2) \delta^{(1)}(t) + (-k_1 - 3k_2) \delta(t) + (k_1 e^{-t} + 9k_2 e^{-3t}) u(t)$$

با گذاشتن $w = \delta(t)$ و $y = h(t)$ در معادله $(۳-۹)$ بدست می‌آید:

$$h^{(2)}(t) + 4h^{(1)}(t) + 3h(t) = (k_1 + k_2) \delta^{(1)}(t) + (3k_1 + k_2) \delta(t)$$

$$= \delta^{(1)}(t) + 2\delta(t)$$

حال ضرایب $\delta^{(1)}(t)$ و $\delta(t)$ را در دو طرف مساوی هم قرار میدهیم:

$$k_1 + k_2 = 1$$

$$3k_1 + k_2 = 2$$

بنابراین ضرایب k_1 و k_2 چنین خواهند بود:

$$k_1 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{1}{2}$$

در نتیجه پاسخ ضربه از معادله (۳-۱۰) بصورت زیر بدست می‌آید :

$$h(t) = \frac{1}{\gamma} (e^{-t} + e^{-\gamma t}) u(t)$$

تمرین = پاسخ ضربه برای متغیر γ را که با معادلات دیفرانسیل زیر مشخص شده است بدست آورید :

$$\frac{dy}{dt} + \gamma y = w$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + w$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \gamma \frac{d^2 y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} + \gamma y = \frac{d^2 w}{dt^2} + w$$

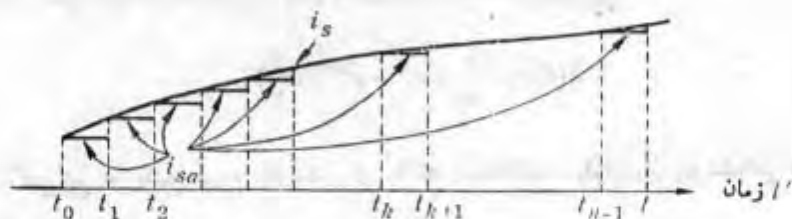
۴- پاسخ به یک ورودی دلخواه

اکنون میدانیم که چگونه میتوان پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان را محاسبه نمود. در این بخش نشان خواهیم داد که با استفاده از پاسخ ضربه این مدار میتوان پاسخ حالت صفر را برای هر نوع ورودی دلخواه بدست آورد. در این محاسبه «خطی بودن»^(۱) و تغییرناپذیری بازمان^(۲) دو خاصیت بسیار اساسی برای بدست آوردن نتایج میباشند.

۴-۱- بدست آوردن انتگرال کانولوشن

در اینجا میخواهیم پاسخ حالت صفر $v(0)$ یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان را به یک ورودی $i_s(0)$ محاسبه کنیم. فرض میکنیم که ورودی در لحظه t_0 به مدار اعمال شود و مدار در زمان t_0 در حالت صفر قرار داشته باشد، و بنابراین میتوان برای $t < t_0$ ، $i_s(t) = 0$ را در نظر گرفت.

مسئله، محاسبه $v(t)$ ، یعنی پاسخ v در لحظه t برای هر زمان $t > t_0$ است، با فرض اینکه پاسخ ضربه h مدار برای ما معلوم است. بعنوان قدم اول، ورودی i_s را با تقریبی



شکل ۴-۱ = نمایش تقریبی i_s توسط i_{sa} که از پالسهای با عرض یکسان و متوالی تشکیل شده است.

بشرح زیر در نظر میگیریم. همانطور که در شکل (۴-۱) نشان داده شده است فاصله^(۱) (t_0, t) را به تعداد زیادی، مثلاًⁿ فاصله کوچک با طول Δ تقسیم مینمائیم. نقاط این زیر قسمتها را $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{n-1}$ مینامیم. بنابراین:

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_{k+1} - t_k = \dots = \Delta$$

میباشد. توابع پله i_{sa} را با تقریب آنچنان به منحنی i_s ارتباط میدهم که عرض منحنی تقریبی $i_{sa}(t)$ در نقطه‌ای بطول t' مطابق روابط زیر باشد:

$$(4-1) \quad i_{sa}(t') = \begin{cases} i_s(t_0) & t_0 \leq t' < t_1 \\ i_s(t_1) & t_1 \leq t' < t_2 \\ \dots & \dots \\ i_s(t_k) & t_k \leq t' < t_{k+1} \\ \dots & \dots \\ i_s(t_{n-1}) & t_{n-1} \leq t' < t_n = t \end{cases}$$

بویژه توجه کنید که t' یک زمان دلخواه در فاصله $[t_0, t]$ میباشد. ارتباط شکل موج $i_{sa}(t)$ به شکل موج داده شده $i_s(t)$ در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. واضح است که (برای بسیاری از انواع ورودی‌ها) وقتی $n \rightarrow \infty$ ، (بنابراین $\Delta \rightarrow 0$) اختلاف میان پاسخ مدار به $i_s(t)$ و $i_{sa}(t)$ نیز بسط صفر میل میکند (باسانی میتوان نشان

داد که این موضوع برای تمام i_s های پیوسته تکه‌ای^(۱) صادق است .

توجه کنید که تقریب پله‌ای i_{sa} را میتوان بصورت مجموعی از پالس‌های مستطیلی در نظر گرفت و این امر در شکل (۲-۴) نشان داده شده است . تمام پالسها دارای عرض یکسان Δ بوده ، ولی از لحاظ ارتفاع و محل قرار گرفتن در روی محور زمان متفاوت میباشند . بیادآورید که در فصل دوم تابع پالس p_{Δ} را بصورت زیر تعریف نمودیم .

$$p_{\Delta}(t') = \begin{cases} 0 & t' \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t' < \Delta \\ 0 & \Delta \leq t' \end{cases}$$

هرگاه این تابع پالس p_{Δ} را بمیزان t_k سمت «راست» انتقال دهیم، تابع پالس منتقل شده‌ای با نمایش زیر بدست می‌آید :

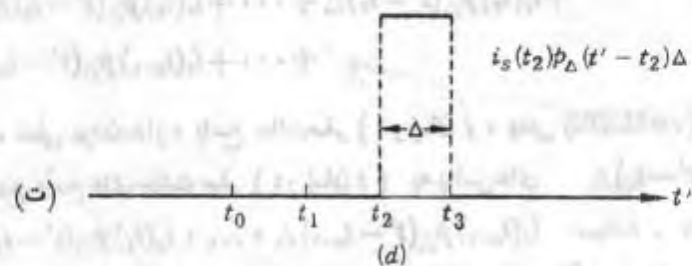
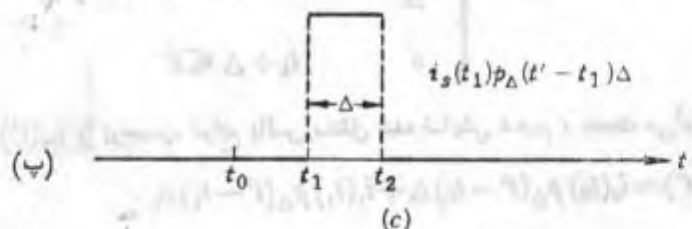
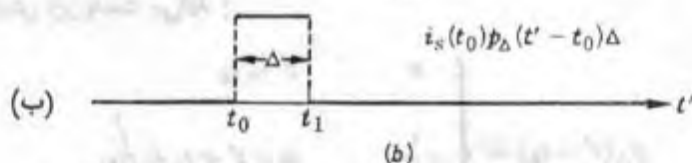
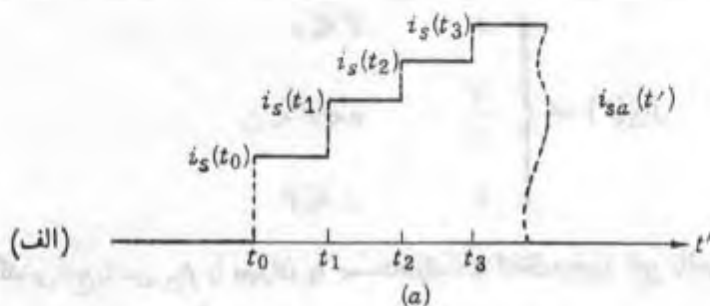
$$p_{\Delta}(t' - t_k) = \begin{cases} 0 & t' \leq t_k \\ \frac{1}{\Delta} & t_k < t' < t_k + \Delta \\ 0 & t_k + \Delta \leq t' \end{cases}$$

اگر $i_{sa}(t')$ را برحسب توابع پالس منتقل شده نمایش دهیم ، بدست می‌آوریم :

$$\begin{aligned} i_{sa}(t') = & i_s(t_0) p_{\Delta}(t' - t_0) \Delta + i_s(t_1) p_{\Delta}(t' - t_1) \Delta \\ & + i_s(t_2) p_{\Delta}(t' - t_2) \Delta + \dots + i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta \\ & + \dots + i_s(t_{n-1}) p_{\Delta}(t' - t_{n-1}) \Delta \end{aligned} \quad (2-4)$$

بعلت خطی بودن مدار ، پاسخ حالت صفر (در زمان t ، یعنی زمان مشاهده) به i_{sa} ، برابر مجموع پاسخ های حالت صفر (در زمان t) به پالس های $i_s(t_0) p_{\Delta}(t' - t_0) \Delta$ ، $i_s(t_1) p_{\Delta}(t' - t_1) \Delta$ ، $i_s(t_2) p_{\Delta}(t' - t_2) \Delta$ ، ... ، $i_s(t_{n-1}) p_{\Delta}(t' - t_{n-1}) \Delta$ میباشد . بنابراین ، مسأله به محاسبه پاسخ حالت صفر مدار (در زمان t) یکی از پالس ها مثلا پالس $(k+1)$ ام ، یعنی

هرگاه پاسخ حالت صفر مدار به $p_{\Delta}(0)$ را برابر $i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta$ بنامیم، با استفاده از خواص خطی بودن و تغییرناپذیری بازمان نتیجه میشود که پاسخ حالت صفر مدار به پالس $i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta$ در زمان مشاهده t ، برابر $i_s(t_k) h_{\Delta}(t - t_k) \Delta$ خواهد بود. آرگومان h_{Δ} برابر $t - t_k$ است، زیرا پالس در زمان t_k بهمدار اعمال شده است. بنابراین در زمان مشاهده که آنرا t



شکل ۲-۴- تابع تقریبی i_{sa} شکل (الف) میتواند بعنوان مجموع پالسهای

مستطیلی شکلهای (ب) و (پ) و (ت) و غیره تعبیر شود.

مینامیم، تنها $t - t_k$ ثانیه از زمان اعمال پالس گذشته است. با تکرار این استدلال برای هریک از پالس‌های (۲-۱)، پاسخ حالت صفر برای $i_{sa}(0)$ چنین بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & i_s(t_0)h_{\Delta}(t-t_0)\Delta + i_s(t_1)h_{\Delta}(t-t_1)\Delta \\ & + \dots + i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta + \dots + i_s(t_{n-1})h_{\Delta}(t-t_{n-1})\Delta \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta \end{aligned} \quad (2-1)$$

قدم بعدی میل دادن $n \rightarrow \infty$ میباشد. چون $t - t_0$ ثابت بوده و $t - t_0 = n\Delta$ است وقتی $n \rightarrow \infty$ ، در نتیجه $\Delta \rightarrow 0$. وقتی $\Delta \rightarrow 0$ ، نتایج زیر حاصل میشوند:

- ۱- تقریب پله‌ای $i_{sa}(0)$ بصورت ورودی اصلی $i_s(0)$ درسی‌آید.
- ۲- پاسخ حالت صفر به $i_{sa}(0)$ همان پاسخ حالت صفر به $i_s(0)$ ، یعنی $v(0)$ ، میگردد.
- ۳- پاسخ حالت صفر $h_{\Delta}(0)$ به $p_{\Delta}(0)$ ، همان پاسخ ضربه h میشود.
- ۴- مجموع موجود در (۲-۱) تبدیل بانTEGRAL میشود، بعبارت دیگر،

$$v(t) = \int_{t_0}^t i_s(t')h(t-t') dt' \quad \text{برای } t \geq t_0$$

این معادله برای هر زمان $t > t_0$ ، «ولتاژ خروجی حالت صفر» در زمان t را که ناشی از جریان ورودی i_s در زمان t_0 میباشد بدست میدهد.

«نتیجه» محاسبه «پاسخ حالت صفر» هر مدار خطی تغییرناپذیر بازمان به یک ورودی «دلخواه» منجر میشود به:

- ۱- تعیین «پاسخ ضربه» h
- ۲- محاسبه انتگرال:

$$(2-2) \quad \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt' = v(t) \quad \text{برای } t \geq t_0$$

که در آنجا t_0 لحظه‌یی است که ورودی v به مدار اعمال می‌شود. این چنین انتگرالی را **انتگرال کانولوشن** می‌نامند.

قضیه فرعی^(۱) - با نتیجه گیری مستقیم از (۴-۱) میتوان گفت که شکل موج $v(t)$ ، یعنی «پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به یک ورودی «دلخواه»، تابع خطی شکل موج ورودی $v(t)$ می‌باشد». (به تعریف یک تابع خطی در ضمیمه الف و مثال ۴ بخش ۲-۳ در همان ضمیمه مراجعه شود).

تبصره ۱- هر مقدار جدید t که بخواهیم ولتاژ خروجی $v(t)$ را در آن حساب کنیم نیاز به یک انتگرال گیری جدید دارد زیرا، عبارت زیر انتگرال^(۲) نیز به t وابسته است.

تبصره ۲- توجه شود که حد پائین انتگرال، t_0 ، زمانی است که در آن مدار در حالت صفر می‌باشد، و همچنین توجه کنید که حد بالای انتگرال، t ، زمانی است که می‌خواهیم v را در آن حساب کنیم. نباید انتگرال را برای مقادیر بیش از t در حد بالا حساب نمود، زیرا مقادیری که جریان ورودی پس از زمان t دارا می‌شود، اثری روی پاسخ مدار در زمان t نخواهد داشت.

تبصره ۳- حال استدلال این بیان را، که پاسخ حالت صفر در زمان t ، ناشی از یک ضربه اعمال شده در لحظه t_k ، تابعی از $t - t_k$ می‌باشد، مجدداً بررسی می‌کنیم. در حالت کلی میتوان نوشت، $h(t, t_k)$ ، یعنی پاسخ یک تابع دو متغیره است: t ، یعنی لحظه مشاهده و t_k ، یعنی لحظه‌یی که ضربه به مدار اعمال شده است. حال «تغییرناپذیر با زمان» بودن مدار را بخاطر می‌آوریم، بدین معنی که برای هر T ، نتایجی که از انجام آزمایشی در زمان حال بدست می‌آید، کاملاً مساوی همان نتایجی است که از انجام همان آزمایش در T ثانیه بعد بدست خواهد آمد، و بویژه پاسخ حالت صفر در زمان t ، ناشی از ضربه اعمال شده در زمان t_k ، معادل با پاسخ حالت صفر در زمان $T + t_k$ ، ناشی از ضربه اعمال شده در زمان $T + t_k$ خواهد بود و بنابراین:

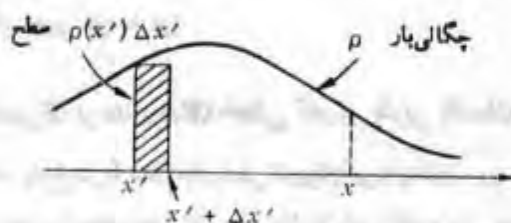
$$h(t, t_k) = h(t + T, t_k + T) \quad \text{برای تمام } T$$

چون این معادله برای تمام مقادیر T برقرار است، عدد $h(t, t_k)$ بطور یکتایی

با تفاضل $t - t_0$ مشخص می‌گردد و در نتیجه نوشتن آن بصورت $h(t - t_0)$ تصدیق می‌شود. تبصره ۴ - مطلب جالبی که از این بحث نتیجه می‌شود اینست که چون در محاسبه پاسخ حالت صفر توسط (۴-۱) هیچگونه استفاده‌یی از نمایش معادله دیفرانسیل مدارهای «فشرده» نشده است، بنابراین هرگاه بروشی، پاسخ ضربه یک مدار گسترده^(۱) خطی تغییرناپذیر با زمان را بدانیم، آنگاه با استفاده از (۴-۱) میتوان «پاسخ حالت صفر» آنرا به «هر» ورودی دلخواه محاسبه نمود.

۲-۴- مثالی از انتگرال کانولوشن در فیزیک

شاید تاکنون به انتگرال کانولوشن در فیزیک برخورد کرده‌اید. مثلاً فرض کنید که یک طناب ناپلونی محکم داریم که روی آن مقداری بار الکتریکی توزیع نموده‌ایم. این طناب میتواند تسمه مولدواندوگراف^(۲) باشد. فرض کنید میخواهیم پتانسیل الکتروستاتیکی را در نقطه x از این طناب، که ناشی از توزیع بار یکنواخت با چگالی ρ میباشد و در شکل (۳-۱) نشان داده شده است حساب کنیم. بار واقع در فاصله کوچک $(x' + \Delta x' \text{ و } x')$ مساوی $\rho(x') \Delta x'$ میباشد که در آن $\rho(x')$ ، چگالی بار در نقطه x' بر حسب کولمب بر متر و $\Delta x'$ ، طول فاصله بر حسب متر است. اگر این بار برابر ۱ کولمب می‌بود، پتانسیل در نقطه x مساوی $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|}$ میشد (توجه کنید، بعلا این که فاصله بین دو نقطه یک عدد مثبت است، کاربرد قدر مطلق $x - x'$ ضروری میباشد). حال با توجه باین واقعیت که پتانسیل در یک نقطه، تابعی



شکل ۳-۴ - تشریح پتانسیل الکتروستاتیک

مربوط به انتگرال کانولوشن

خطی از بار می‌باشد و با استفاده از خاصیت همگنی، سهم پتانسیل نقطه x ناشی از بار $\rho(x')\Delta x'$ مساویست با:

$$\frac{\rho(x')\Delta x'}{4\pi\epsilon_0 |x-x'|}$$

با استفاده از خاصیت جمع پذیری و گذشتن به حد، پتانسیل زیر بدست می‌آید:

$$(4-5) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x') dx'}{4\pi\epsilon_0 |x-x'|}$$

هرگاه برای سهولت،

$$h(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r|}$$

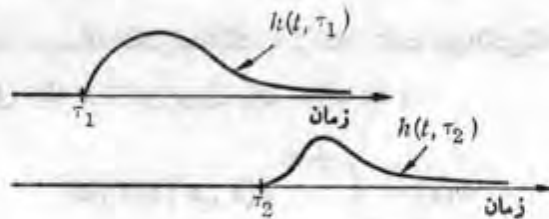
باشد، که در آن r مغرف فاصله است، رابطه (4-5) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-x') \rho(x') dx'$$

تعبیر تابع h چنین است: $h(r)$ پتانسیل ناشی از «واحد» بار الکتریکی در فاصله r از این بار می‌باشد. انتگرال کانولوشن بایستی از $-\infty$ تا $+\infty$ گرفته شود زیرا هرباری که روی این طناب محکم قرار گیرد، خواه درست راست و خواه درست چپ نقطه x واقع باشد، در پتانسیل نقطه x سهمیم خواهد بود.

۳-۴- تفسیری بر مدارهای خطی تغییرپذیر با زمان

تاکنون فقط پاسخ ضربه مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. مفهوم پاسخ ضربه برای مدارهای خطی تغییرپذیر با زمان نیز بکار میرود. بموجب تعریف، پاسخ حالت صفر به یک ضربه واحد، پاسخ ضربه نامیده میشود. بعنوان مثال مدارهای خطی تغییرپذیر با زمان، یک تقویت کننده خطی را که ضریب تقویت^(۱) آن به کندی با زمان تغییر



شکل ۴-۴ - پاسخ های ضربه برای مدار تغییرپذیر بازمان .

درمورد اول، یک ضربه واحد در زمان τ_1

و درمورد دوم، در زمان τ_2 به مدار اعمال

شده است .

میکنند در نظر میگیریم . برای چنین مداری پاسخ حالت صفر به ضربه واحدی که در زمان τ_1 اعمال میشود، یعنی $\delta(t - \tau_1)$ ، مساوی پاسخ حالت صفر برای ضربه واحد دیگری که در زمان τ_2 ، یعنی $\delta(t - \tau_2)$ به مدار اعمال میگردد نخواهد بود . علت این امر اینست که ضریب تقویت تقویت کننده در زمان τ_1 و لحظه یی بعد از آن، از ضریب تقویت آن در زمان τ_2 و لحظه یی بعد از آن متفاوت است . بالنتیجه در بیان پاسخ ضربه بایستی لحظه اعمال ضربه به مدار نیز بدقت تعیین شود . در حالت مورد بحث ، پاسخ ضربه ممکن است مشابه شکل (۴-۴) باشد . بطور کلی $h(t, \tau)$ بیان کننده « پاسخ حالت صفر در زمان t ناشی از ضربه واحد اعمال شده در زمان τ » میباشد .

برای « مدارهای خطی تغییرپذیر بازمان » میتوان نشان داد که پاسخ حالت صفر تابع خطی ورودی است . در حقیقت با استفاده از خواص جمع پذیری و همگنی میتوان نشان داد که « پاسخ حالت صفر به یک ورودی « دلخواه » i_z که در زمان t_0 اعمال میشود برابر است » با :

$$(۴-۶) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t, t') i_z(t') dt' \quad t \geq t_0$$

چنانچه فرمول فوق را با (۴-۴) مقایسه کنیم ، مشاهده خواهیم کرد که تنها تفاوت

این دو آنست که اکنون پاسخ ضربه تابعی از دو متغیر t و t' میباشد در حالیکه در (۴-۴)

تابعی از تناضل $t - t'$ بود .

بطور مشابه، درساله الکتروستاتیک، اگر مثلاً ثابت دی‌الکتریکه^(۱) ϵ ، تابعی از x' باشد، پتانسیل نقطه x با این فرمول بیان خواهد شد :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, x') \rho(x') dx'$$

که در آنجا $g(x, x')$ ، پتانسیل نقطه x ، ناشی از یک بار نقطه‌یی واحد در x' میباشد.

۴-۴- پاسخ کامل

در فصل چهارم ثابت کردیم که برای یک مدار RC خطی تغییرناپذیر با زمان و از مرتبه اول، پاسخ کامل مساوی مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر میباشد. در حقیقت برای هر مدار خطی، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان، بیان فوق صحیح میباشد. اثبات کلی و کامل این بیان در فصل سیزدهم داده خواهد شد. فعلاً این حقیقت را بصورت معادله زیر بیان میکنیم :

$$y(t) = z(t) + v(t)$$

یا :

$$(t-v) \quad y(t) = z(t) + \int_{t_0}^t h(t, t') w(t') dt' \quad t \geq t_0$$

که در آن z پاسخ ورودی صفر و v پاسخ حالت صفر، w ورودی و y پاسخ کامل میباشد. از معادله $(t-v)$ واضح است که « پاسخ کامل، تنها موقعی یک تابع خطی ورودی است که پاسخ ورودی صفر، بطور متحد برابر صفر باشد ».

تمرین ۱- فرض کنید که در مدار شکل $(۲-۱)$ ، سلف L و مقاومت R_2 را حذف کنیم. گیریم i_C ورودی و v_C پاسخ باشد. عبارتی برای $v_C(t)$ ، یعنی پاسخ کامل مدار، برحسب i_C و ولتاژ اولیه خازن V_0 پیدا نمائید.

تمرین ۴- خازن C را از مدار شکل (۲-۱) حذف کنید. با در نظر گرفتن i_L به عنوان پاسخ، عبارتی برای $i_L(t)$ ، یعنی پاسخ کامل مدار بر حسب i_s و جریان اولیه سلف I_0 ، بدست آورید.

۵- محاسبه انتگرال‌های کانولوشن

در بخش قبل نشان دادیم که پاسخ حالت صفر v یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، به یک ورودی دلخواه $i_s(\cdot)$ که در زمان t_0 بمدار اعمال میشود، با انتگرال کانولوشن،

$$(۵-۱) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad t \geq t_0 \quad \text{برای تمام}$$

بیان می‌گردد که در آن h پاسخ ضربه واحد می‌باشد. بنابراین با داشتن پاسخ ضربه h ، میتوان برای $t \geq t_0$ $v(t)$ ناشی از $i_s(\cdot)$ را که در لحظه t_0 بمدار اعمال میشود با انتگرال گیری رابطه (۵-۱) بدست آورد. در این بخش با استفاده از چند مثال، محاسبه انتگرال کانولوشن را تشریح خواهیم کرد. معه‌ذا ابتدا دو نتیجه ساده ولی مفید را بدست می‌آوریم.

۱- فرض کنید که ورودی i_s ، ضربه واحدی است که در $t_1 > t_0$ بمدار اعمال میشود، یعنی، $i_s(t) = \delta(t - t_1)$. می‌خواهیم بوسیله (۵-۱) نشان دهیم که پاسخ v توسط $h(t - t_1)$ بیان میشود. از رابطه (۵-۱) داریم:

$$(۵-۲) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') \delta(t' - t_1) dt' \quad t > t_0 \quad \text{برای}$$

از تعریف تابع ضربه میدانیم که $\delta(t' - t_1)$ برای تمام زمانها بجز $t' = t_1$ برابر صفر است. در نقطه $t' = t_1$ ، δ ویژه بوده و دارای خاصیت:

$$\int_{t_1-}^{t_1+} \delta(t' - t_1) dt' = 1$$

میباشد. بنابراین میتوان بجای (۵-۲) چنین نوشت:

$$v(t) = \int_{t_1-}^{t_1+} h(t-t') \delta(t'-t_1) dt'$$

که در آن t_1- و t_1+ بترتیب نمایشگر درست لحظه‌یی قبل، و درست لحظه‌یی بعد از t_1 میباشند. برای مدارهای فشرده خطی تغییرناپذیر بازمان، h درفاصله $(0, \infty)$ یک تابع پیوسته میباشد. بنابراین میتوان نوشت:

$$(5-3) \quad v(t) = h(t-t_1) \int_{t_1-}^{t_1+} \delta(t'-t_1) dt' = h(t-t_1) \quad t > 0$$

درنتیجه، انتگرال کانولوشن دارای این خاصیت مهم است که (برای $t > t_1 > t_0$):

$$(5-4) \quad \int_{t_0}^t h(t-t') \delta(t'-t_1) dt' = h(t-t_1)$$

معادله (۵-۴) را میتوان نتیجه مستقیم خطی بودن و تغییرناپذیری بازمان مدار دانست. زیرا بموجب تعریف، $h(t)$ پاسخ حالت صفر در زمان t به ضربه « اعمال شده در زمان ۰ » میباشد. تغییرناپذیری بازمان لازم میدارد که اگر ضربه در لحظه t_1 به مدار اعمال شده باشد، پاسخ حالت صفر همان شکل موج قبلی را داشته، اما با اندازه t_1 ثانیه انتقال یافته می‌باشد. عبارت دیگر، در این حالت پاسخ مساوی $h(t-t_1)$ خواهد بود [چنانکه توسط (۵-۴) پیش گویی شد].

۲- انتگرال کانولوشن (۵-۱) را میتوان با یک تغییر متغیر بصورت دیگری نوشت. اگریم $t-t' = \tau$ باشد که τ یک متغیر ساختگی^(۱) جدید است، آنگاه $t' = t - \tau$ و $dt' = -d\tau$ خواهد بود. حدپائین انتگرال برحسب متغیر جدید بصورت $\tau = t - t_0$ و حد بالای انتگرال بصورت $\tau = 0$ خواهد شد. بنابراین:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \int_{t-t_0}^0 h(\tau) i_s(t-\tau) (-d\tau) \\
 (5-5) \quad &= \int_0^{t-t_0} h(\tau) i_s(t-\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

چون t و t' متغیرهای ساختگی انتگرال هستند، میتوان (۵-۵) را برای مقایسه با (۵-۱) مجدداً برحسب t' نوشت و بنابراین :

$$(5-6) \quad v(t) = \int_0^{t-t_0} h(t') i_s(t-t') dt' \quad \text{برای } t \geq t_0$$

در نتیجه، اگر $t_0 = 0$ باشد، (۵-۱) و (۵-۶) هر دو دارای حدود انتگرال گیری یکسان خواهند بود، یعنی بین 0 و t ،

$$(5-7) \quad \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = \int_0^t h(t') i_s(t-t') dt' \quad \text{برای } t \geq 0$$

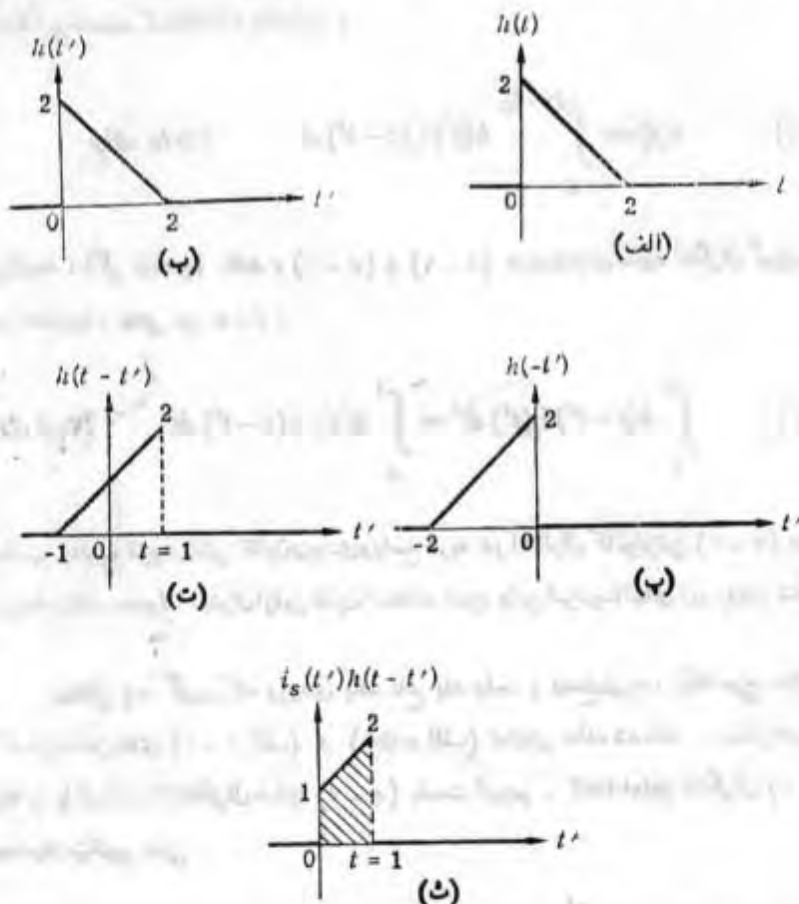
مطلب جالب توجه نقش تقارن ورودی و پاسخ ضربه در انتگرال کانولوشن (۵-۷) میباشد. در محاسبات، معمولاً میتوان از این تقارن استفاده نمود و این امر در مثالهای زیر روشن شده است.

مثال ۱- گیریم که ورودی یک تابع پله واحد و پاسخ ضربه، یک موج مثلثی باشد

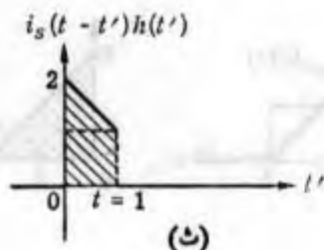
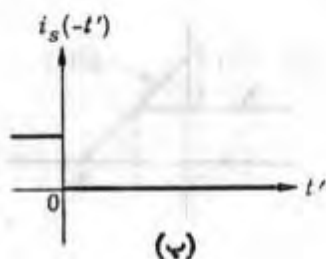
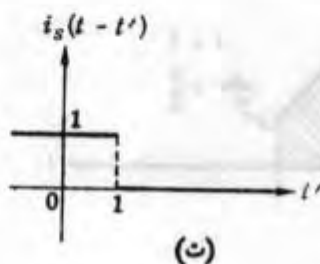
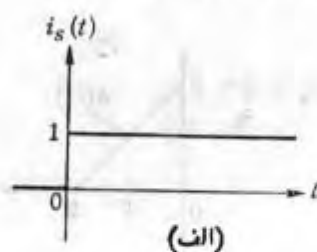
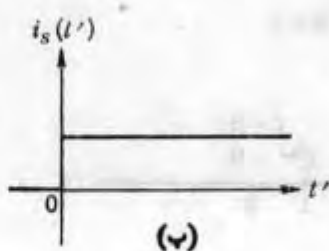
که در شکل های (۱-الف) و (۲-الف) نمایش داده شده اند. میخواهیم پاسخ پله را با استفاده از انتگرال های (۵-۷) بدست آوریم. ابتدا اولین انتگرال (۵-۷) را محاسبه میکنیم یعنی :

$$(5-8) \quad v(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad \text{برای } t \geq 0$$

شکل (۱-۵ الف) نمایش هندسی پاسخ ضربه را به ما می‌دهد. این شکل در (۱-۵ ب) تکرار شده است، که در آن بجای متغیر t ، متغیر t' بکار رفته است. شکل (۱-۵ پ)، $h(-t')$ را برحسب t' نشان می‌دهد. توجه شود که این شکل تصویر آینه‌یی نمایش شکل قبل نسبت به محور عرضها می‌باشد. شکل (۱-۵ ت)، تابع $h(t-t')$ را برحسب t' نشان می‌دهد. توجه کنید که t مقدار ثابتی است (در شکل $t=1$ می‌باشد). همچنین توجه کنید که نمایش شکل (۱-۵ ت)، از انتقال شکل (۱-۵ پ) به مقدار t ثانیه، به سمت راست حاصل شده است. شکل (۱-۵ ث) نمایش هندسی عبارت زیر انتگرال



شکل ۱-۵- مثالی برای تشریح محاسبه انتگرال کانولوشن با استفاده از معادله (۵-۸). محاسبه برای $t=1$ انجام شده است.



شکل ۲-۵- مثال برای تشریح محاسبه انتگرال کانولوشن

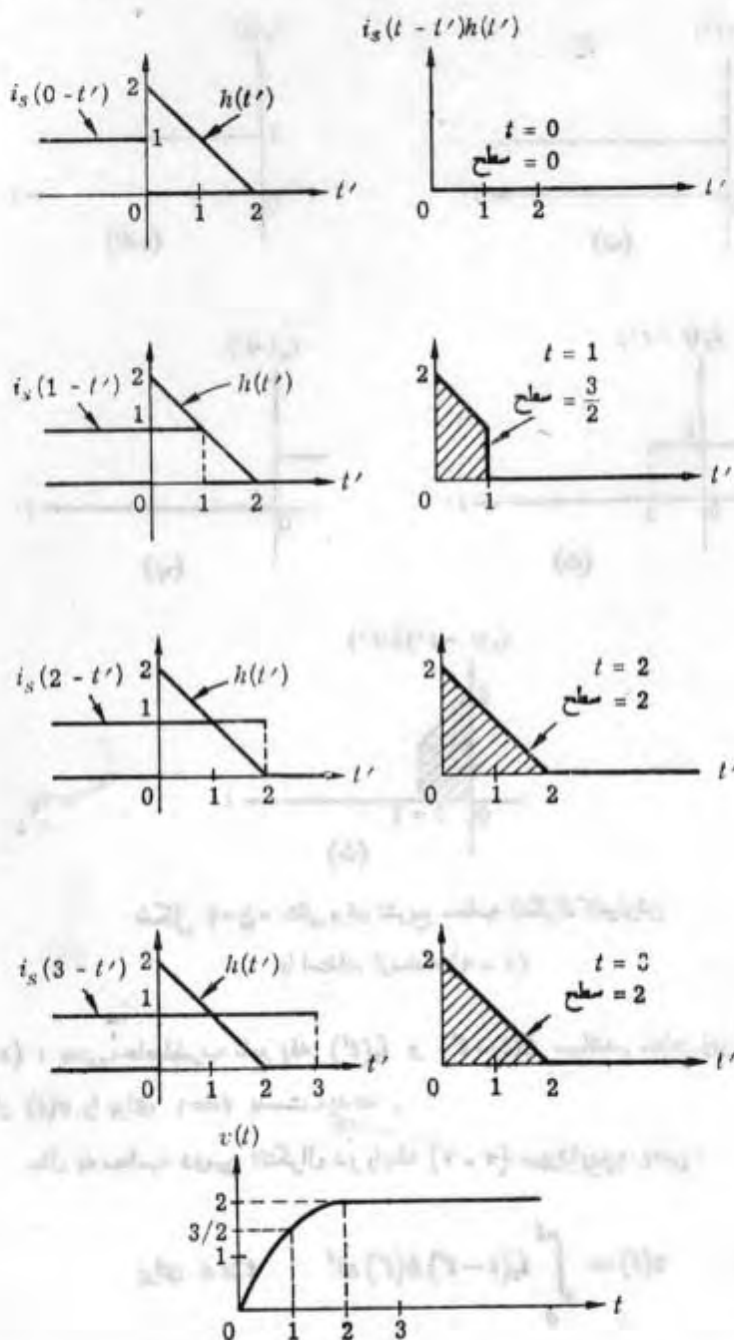
با استفاده از معادله (۹ - ۵)

(۸-۵) ، یعنی، حاصلضرب تابع پله $i_s(t')$ و $h(t - t')$ میباشد. سطح زیر این شکل، مقدار $v(t)$ را برای $t = 1$ بدست میدهد.

حال به محاسبه دومین انتگرال در رابطه (۷ - ۵) میپردازیم، یعنی:

$$(۹-۵) \quad v(t) = \int_0^t i_s(t - t') h(t') dt' \quad \text{برای } t \geq 0$$

ابتدا t' را بر حسب t رسم میکنیم (شکل ۲ - ۵ ب). آنگاه تصویر آینه‌یی آنرا نسبت



شکل ۳-۵- مثال ۱: تشریح محاسبه کانولوشن

به محور عرضها یعنی $i_s(-t')$ را برحسب t' رسم میکنیم. سپس همه نمایش هندسی را بهیزان t ثانیه، به سمت راست انتقال داده و $i_s(t-t')$ را برحسب t' بدست میآوریم (شکل ۲-۵ ت). آنگاه حاصلضرب پاسخ ضربه $h(t')$ و $i_s(t-t')$ را رسم میکنیم (شکل ۲-۵ ث). سطح زیر این شکل، $v(t)$ را برای $t=1$ تعیین میکند. واضح است که نتایج بدست آمده از هردو حالت مساوی خواهند بود. در شکل (۳-۵) نمایش های هندسی را که برای محاسبه انتگرال (۹-۵) برای مقادیر ۳، ۲، ۱، ۰، $t=0$ بکار رفته، رسم نموده ایم.

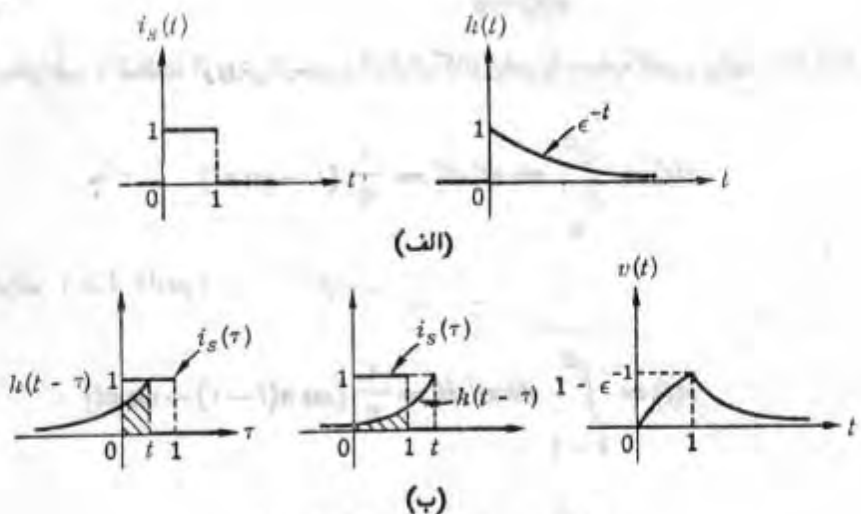
مثال ۲-۲ پاسخ حالت صفر را برای ورودی و پاسخ ضربه داده شده در شکل (۴-۵ الف) تعیین نموده و رسم کنید. داریم:

$$i_s(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

واضح است که پاسخ $v(t)$ برای t منفی صفر میباشد. برای $t \geq 0$ از رابطه زیر استفاده میکنیم:

$$v(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt'$$



شکل ۴-۵-۲ مثال ۲ انتگرال کانولوشن

برای $0 \leq t < 1$ ، چون $i_s(t) = 1$ است داریم:

$$v(t) = \int_0^t e^{-(t-t')} dt' = 1 - e^{-t}$$

برای $t \geq 1$ ، چون $i_s(t) = 0$ ، تنها کافی است تا $t = 1$ انتگرال گرفته شود. بنابراین:

$$v(t) = \int_0^1 e^{-(t-t')} dt' = (e-1)e^{-t}$$

تعبیر هندسی این دوبرحله و پاسخ مدار در شکل (۴-۵) نشان داده شده‌اند.

مثال ۳-۳- پاسخ حالت صفر را برای ورودی و پاسخ ضربهٔ نشان داده شده در شکل

(۵-۵) تعیین نمایید. داریم:

$$i_s(t) = u(t) \sin \pi t$$

$$h(t) = u(t) - u(t-1)$$

برای $t \leq 0$ داریم:

$$v(t) = 0$$

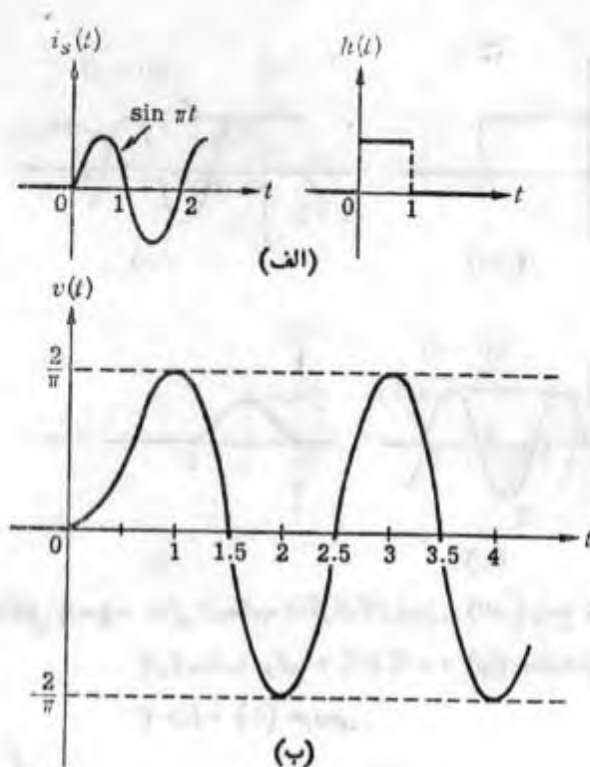
میخواهیم با استفاده از روش ترسیمی، انتگرال کانولوشن را حساب کنیم. برای $0 \leq t \leq 1$

$$v(t) = \int_0^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi t)$$

برای $t \geq 1$ داریم:

$$v(t) = \int_{t-1}^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} [\cos \pi(t-1) - \cos \pi t]$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cos \pi t$$



شکل ۵-۵- مثال ۳ انتگرال کانولوشن

نتیجه در شکل (ه - ه ب) نشان داده شده است. توجه کنید که پاسخ پس از گذشت زمان «گذرا»، که در فاصله $0 \leq t \leq 1$ می باشد، سینوسی خواهد بود.

مثال ۴- برای همان ورودی مثال ۳ و پاسخ ضربه شکل (۶ - ه الف) که یک پالس مستطیلی با عرض ۲ ثانیه می باشد، پاسخ حالت صفر را تعیین کنید. بنابراین:

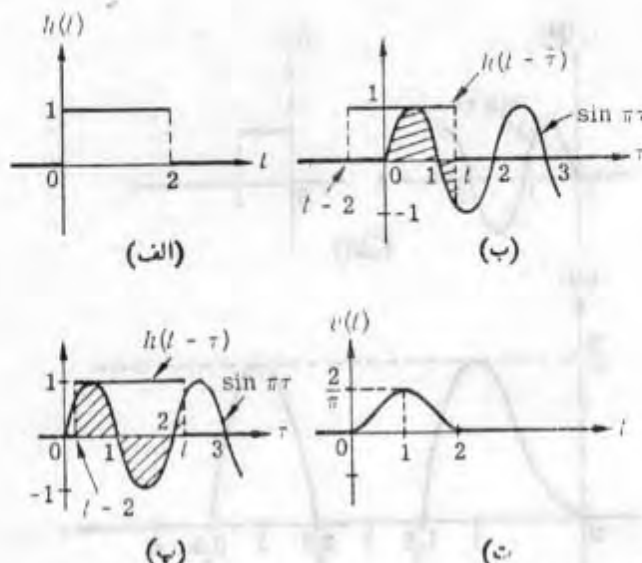
$$i(t) = (\sin \pi t)u(t)$$

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

برای $t < 0$ داریم:

$$v(t) = 0$$

برای $0 \leq t \leq 2$ (شکل ۶ - ه ب را ببینید):



شکل ۶-۵- مثالی از محاسبه انتگرال کانولوشن. (الف) پاسخ ضربه،

(ب) محاسبه برای $0 \leq t \leq 2$ ، (پ) محاسبه برای

$t \geq 2$ ، (ت) خروجی.

$$v(t) = \int_0^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi t)$$

برای $t \geq 2$ (شکل ۶-۵ ب را ببینید).

$$v(t) = \int_{t-2}^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} [\cos \pi(t-2) - \cos \pi t] = 0$$

پاسخ (۰) $v(t)$ در شکل (۶-۵ ت) نشان داده شده است. توجه کنید که برای $t \geq 2$ ، پاسخ بطور متحد مساوی صفر می‌باشد. درحقیقت، برای $t \geq 2$ ، پاسخ حالت صفر را می‌توان یک تابع میثوسی با دامنه صفر تعبیر نمود.

خلاصه

● در این فصل برخلاف فصل‌های قبل، اساساً با روش‌هایی برخورد می‌کنیم که در تجزیه و تحلیل مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان مفید می‌باشند. سه روش عمده چنین است: (۱) تجزیه و تحلیل مش و گره، (۲) تعیین پاسخ ضربه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام، (۳) محاسبه انتگرال‌های کانولوشن.

● تجزیه و تحلیل گره برای مداری با $n+1$ گره، برپایه نوشتن n معادله KCL در n گره، برحسب مجموعه‌ی از n ولتاژ جفت گره قرار دارد.

● تجزیه و تحلیل مش برای مداری با m مش، برپایه نوشتن m معادله KVL برای m مش، برحسب مجموعه‌ی از m جریان مش قرار دارد.

● برای یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان با یک ورودی و یک خروجی، با انجام عملیاتی در معادلات گره یا مش، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت برای متغیر خروجی بدست می‌آید.

● پاسخ ضربه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام مناسب، بصورت زیر می‌باشد:

$$h(t) = u(t) \left(\sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \right)$$

که در آن، s_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، ریشه «متمايز» معادله مشخصه می‌باشند.

● برای مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان، پاسخ حالت صفر v ، به هرورودی i_s که در زمان t_0 بمدار اعمال می‌شود، مساوی کانولوشن ورودی i_s که در زمان t_0 اعمال شده، با پاسخ ضربه h می‌باشد. یعنی:

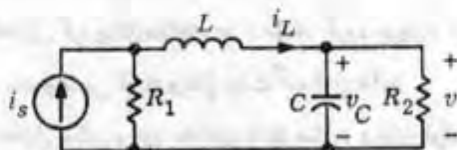
$$v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad \text{برای } t \geq t_0$$

● برای تمام $t \geq 0$ داریم:

$$\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = \int_0^t i_s(t-t') h(t') dt'$$

مسائل

۱- تجزیه و تحلیل گره برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱-۶) با بکار بردن تجزیه و تحلیل گره، معادله دیفرانسیلی بر حسب ولتاژ v بدست آورید. شرایط اولیه $v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ داده شده‌اند.

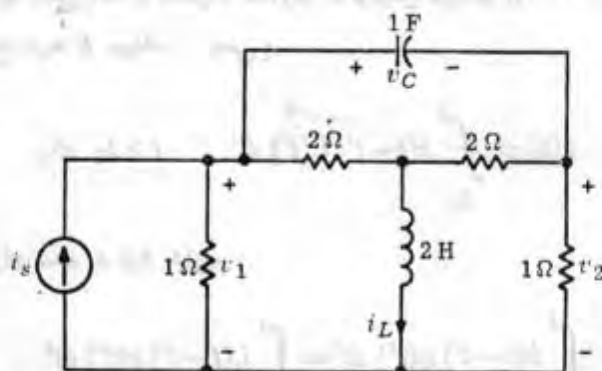


شکل (مسئله ۱-۶)

۲- تجزیه و تحلیل مش در مدار مسأله قبل، منبع جریان را به منبع ولتاژ معادل تبدیل نموده، آنگاه با بکار بردن تجزیه و تحلیل مش، معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیر v بدست آورید.

۳- معادلات حالت معادلات حالت را برای مدار مسأله قبل بنویسید. v و i_L را بعنوان متغیرهای حالت بکار ببرید.

۴- تجزیه و تحلیل گره معادلات گره را برای مدار خطی تغییرناپذیر با زمان شکل (مسئله ۴-۶) بنویسید. معادلات دیفرانسیلی برای ولتاژهای v_1 و v_2 تعیین کنید. شرایط اولیه لازم برای هر مورد را بر حسب $v_C(0)$ و $i_L(0)$ بیان کنید.



شکل (مسئله ۴-۶)

۵- تجزیه و تحلیل مش مسأله قبل را بابکار بردن تجزیه و تحلیل مش حل کنید .

۶- معادلات حالت معادلات حالت را برای مدار شکل (مسأله ۴ - ۶) بنویسید .

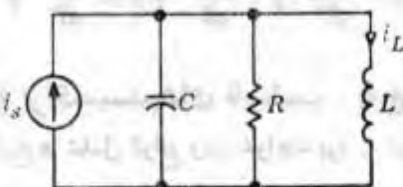
۷- شرایط اولیه و تحریک ضربه مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RLC در شکل (مسأله ۶ - ۷) را در نظر بگیرید . گیریم که h ، جریان سلف ناشی از $i_s = \delta$ بوده و $h(0_-) = \frac{dh}{dt}(0_-) = 0$ باشد .

الف - مقادیر $h(0_+)$ و $\frac{dh}{dt}(0_+)$ را محاسبه کنید (بر حسب C و L و R) .

ب - مستقیماً نشان دهید که (با بررسی شرایط اولیه و گذاردن آنها در معادله دیفرانسیل):

$$i_L(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad \text{برای } t \geq 0$$

پاسخ حالت صفر به ورودی i_s میباشد .



شکل (مسأله ۷ - ۶)

۸- پاسخ ورودی صفر ، پاسخ ضربه و پاسخ پله معادله دیفرانسیل یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان ، بصورت زیر داده شده است :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{d^2 w}{dt^2} + 2w$$

شرایط اولیه عبارتند از :

$$y(0_-) = 1 \quad \frac{dy}{dt}(0_-) = 2 \quad \frac{d^2y}{dt^2}(0_-) = -1$$

پاسخ ورودی صفر، پاسخ ضربه و پاسخ پله را بدست آورید.

۹- پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل برای مسأله ۸، اگر w ورودی سینوسی، $w(t) = \cos t$ باشد، پاسخ حالت صفر را با دو روش مختلف بدست آورید. پاسخ کامل را برای شرایط اولیه داده شده محاسبه کنید.

۱۰- پاسخ ضربه پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = w \quad \text{الف -}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + w \quad \text{ب -}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + 2w \quad \text{پ -}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2w}{dt^2} + 2w \quad \text{ت -}$$

۱۱- پاسخ ضربه برای سیستم‌های نامناسب پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. پاسخ‌ها شامل توابع ویژه خواهند بود. توابع ویژه لازم را با معادل نمودن جملات متناظر دو طرف معادله بدست آورید.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 2 \frac{d^2w}{dt^2} + 0 \frac{dw}{dt} + w \quad \text{الف -}$$

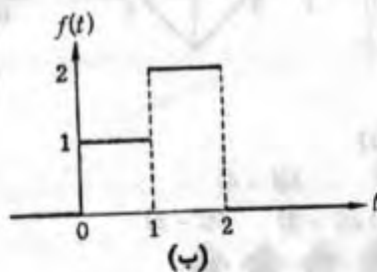
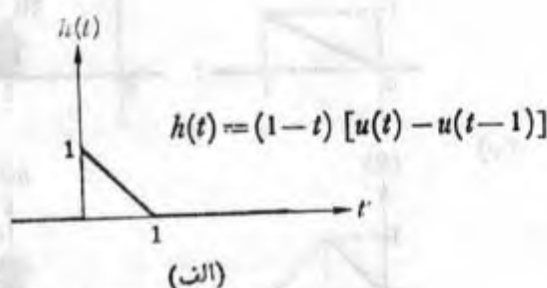
$$\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{d^2w}{dt^2} + 2 \frac{dw}{dt} + 2w \quad \text{ب -}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0 \frac{dy}{dt} + y = 2 \frac{d^2w}{dt^2} + 2 \frac{d^2w}{dt^2} + w \quad \text{پ -}$$

۱۲- پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، دارای پاسخ ضربه $h(t)$ مطابق شکل (مسئله ۱۲ - الف) میباشد.

الف - پاسخ پله $s(0)$ را حساب کنید.

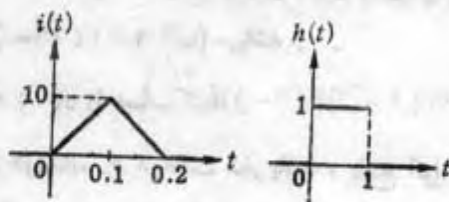
ب - اگر سیستم در زمان $t=0$ در حالت صفر باشد، پاسخ آنرا به شکل موج f نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۲ - ب) پیدا کنید.



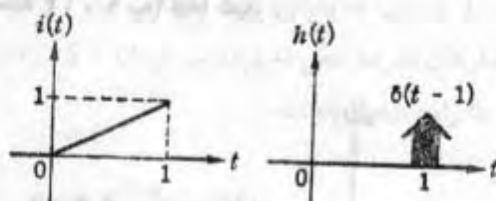
شکل (مسئله ۱۲ - ۶)

۱۳- پاسخ حالت صفر پاسخ حالت صفر موارد زیر را بدون استفاده از انتگرال کانولوشن بدقت رسم کنید (شکل مسئله ۱۳ - ۶). h نماینده پاسخ ضربه مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مورد بررسی و f نمایش ورودی آن است.

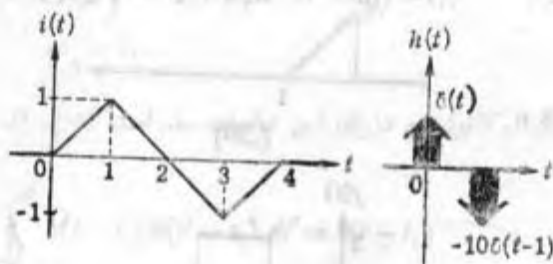
(الف)



(ب)

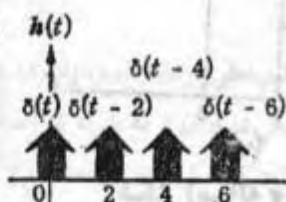


(پ)



مانند حالت

(پ)



(ت)

شکل (مسأله ۱۳ - ۶)

۱۴- انتگرال کانولوشن مسأله ۱۳ را با استفاده از انتگرال کانولوشن حل کنید.

۱۵- پاسخ پله و پاسخ ضربه به پاسخ حالت صفر $h(t)$ یک شبکه به جریان ورودی

ضربه واحد در شکل (مسأله ۱۵ - ۶) رسم شده است.

الف- پاسخ حالت صفر را به ورودی پله واحد $i(t) = u(t)$ محاسبه و رسم کنید.

ب - پاسخ حالت صفر را برای پالس‌های $\Delta p \Delta(t)$ و $\dot{i}(t) = 0$ برای مقادیر $0, 1, 2, \Delta = 0.2$ ، ثانیه، محاسبه و رسم کنید.

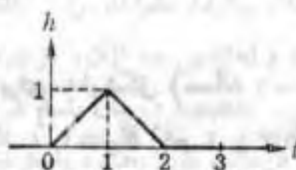
پ - فرض کنید که با تغییر طرح مدار توسط عناصر موجود، میتوان h را بهر صورت دلخواه درآورد بشرطیکه:

$$(1) \quad h(t) = 0 \quad t < 0 \quad \text{برای تمام}$$

$$(2) \quad 0 \leq |h(t)| \leq 1 \quad t \geq 0 \quad \text{برای تمام}$$

$$(3) \quad \int_0^{\infty} h(t) dt = 1$$

با این محدودیت‌های داده شده، اگر بخواهیم پاسخ پله مدار اصلاح شده در کوتاهترین مدت به حالت دائمی خود برسد، چه شکلی را برای h انتخاب خواهید نمود؟



شکل (مسئله ۱۵ - ۶)

۱۶ - پاسخ پله شیب‌دار پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت زیر مشخص میگردد:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} & t \geq 0 \quad \text{برای تمام} \\ 0 & t < 0 \quad \text{برای تمام} \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر v را برای تابع شیب واحد r که در لحظه $t_0 = 1$ بمدار اعمال میشود محاسبه و رسم کنید.

۱۷ - انتگرال کانولوشن اگر پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت زیر داده شده باشد:

$$h(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر مدار را به ورودی زیر حساب کنید :

$$i_s(t) = \begin{cases} tu(t) & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

۱۸- مدار تغییرپذیر بازمان برای یک مدار خطی تغییرپذیر بازمان ، اگر

پاسخ در زمان t ناشی از ضربه واحد اعمال شده در لحظه τ بصورت زیر باشد :

$$h(t, \tau) = t - \tau^2$$

با استفاده از کانولوشن ، پاسخ را برای ورودی $i_s(t) = tu(t) + 2u(t) - \delta(t)$ محاسبه نمائید .

۱۹- پاسخ کامل برای مدار شکل (مسئله ۱-۶) فرض کنید $R_1 = 1$ اهم ،

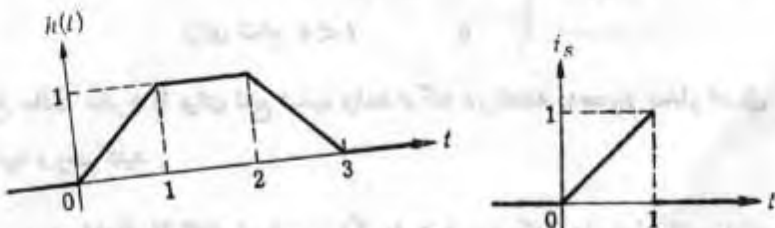
$L = 1$ هنری ، $C = 2$ فاراد ، $R_2 = 1$ اهم ، $I_0 = 1$ آمپر و $V_0 = 1$ ولت باشد .

پاسخ ضربه و پاسخ کامل را برای ولتاژ خروجی v ناشی از پالس $i_{s1}(t) = u(t) - u(t-1)$

حساب کنید . هرگاه ورودی به $i_{s2}(t) = 2i_{s1}(t)$ تبدیل شود پاسخ کامل بجه صورت خواهد بود ؟

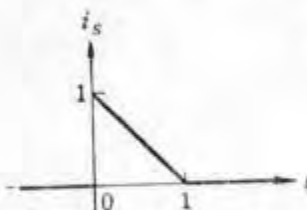
۲۰- انتگرال کانولوشن پاسخ حالت صفر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را

از روی پاسخ ضربه $h(t)$ و ورودی i_s که در شکل (مسئله ۲۰-۶) نشان داده شده اند حساب کنید .



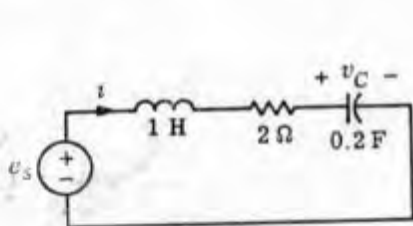
شکل (مسئله ۲۰-۶)

۲۱- انتگرال کانولوشن مسأله ۲۰ را برای همان پاسخ ضربه ولی با ورودی دیگر i_s که در شکل (مسأله ۲۱ - ۶) نشان داده شده تکرار نمایید .

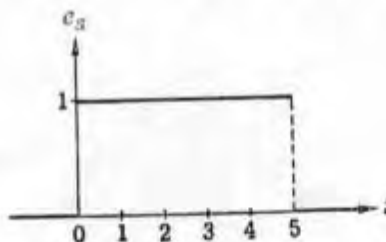


شکل (مسأله ۲۱ - ۶)

۲۲- پاسخ ضربه ، پاسخ کامل و کانولوشن مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RLC سری نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۲ - ۶ الف) را که دارای ورودی e_s و پاسخ i میباشد در نظر بگیرید .



(الف)



(ب)

شکل (مسأله ۲۲ - ۶)

الف - پاسخ ضربه را محاسبه و رسم کنید .

ب - عبارتی بنویسید که توسط آن بتوان پاسخ کامل را برای هرولتاژ ورودی e_s که در زمان $t=0$ بمدار اعمال میشود و برای هر حالت اولیه $i_L(0)=I_0$ و $v_C(0)=V_0$ بدست آورد .

پ - پاسخ کامل را برای $I_0=1$ آمپر ، $V_0=-1$ ولت و e_s مطابق شکل (مسأله ۲۲ - ۶ ب) بدست آورده و رسم نمایید .

فصل هفتم

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

شکل موجهای سینوسی در علوم و مهندسی نقش مهمی را بازی میکنند. در مدارهای الکتریکی، فرکانس سینوسیهای مورد نظر میتواند از چند هرتز (سیکل در ثانیه) تا حدود کیلوهرتز، مگاهرتز و گیگاهرتز^(۱) تغییر کنند. همه ما با جریان سینوسی 50 Hz که برای انتقال قدرت و استفاده در منازل بکار می رود آشنا هستیم. در آزمایشگاه نیز از مولدهای سیگنال سینوسی و آشکارسازهایی^(۲) که دامنه های متعددی از فرکانس را دربردارند استفاده کرده ایم. بعنوان یک مهندس برق میدانیم که شکل موجهای سینوسی در زندگی حرفه ای ما بمنزله نان شب هستند، زیرا همانطور که بعداً خواهیم دید، اگر پاسخ یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را به «فرکانس سینوسی» بدانیم، اصولاً پاسخ آنرا به «هر سیگنال» دیگر خواهیم دانست. بنابراین، یادگیری مؤثرترین روش کار با توابع سینوسی بسیار حایز اهمیت است. در فصل چهارم مثال هایی را بیان نمودیم که در خلال آنها پاسخ مدارهای ساده به ورودی های سینوسی را بدست آوردیم. روش بکاررفته برای تعیین یک جواب خاص اگرچه سراسر بود ولی بسیار ناشیانه است. در این فصل روش بسیار ساده تر و ظریف تری را بدست خواهیم آورد که بر پایه نمایش یک سینوسی با فرکانس داده شده، توسط یک عدد مختلط قرارداد.

۱- مرور اعداد مختلط

۱-۱- توصیف اعداد مختلط

ابتدا پاره ای حقایق اساسی در مورد اعداد مختلط را خلاصه میکنیم. گیریم z یک عدد مختلط باشد و x و y به ترتیب جزء حقیقی و جزء انگاری آن باشند. در این صورت:

$$z = x + jy \quad (1-1)$$

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

که در آن $j = \sqrt{-1}$. همچنین میتوان نوشت:

(۱-۲) $\text{Re}(z) = x$ $\text{Im}(z) = y$
 که در آن $\text{Re}(\dots)$ بمعنی «جزء حقیقی $\dots$ » و $\text{Im}(\dots)$ بمعنی «جزء انگاری $\dots$ » میباشد. سمت راست معادله (۱-۱) نمایش مختصات قائم^(۱) عدد مختلط z میباشد. نمایش قطبی عدد مختلط z چنین است:

(۱-۳) $z = |z| e^{j\theta}$
 که در آن $|z|$ اندازه و یا دامنه z نامیده میشود و مقدار آن چنین است:

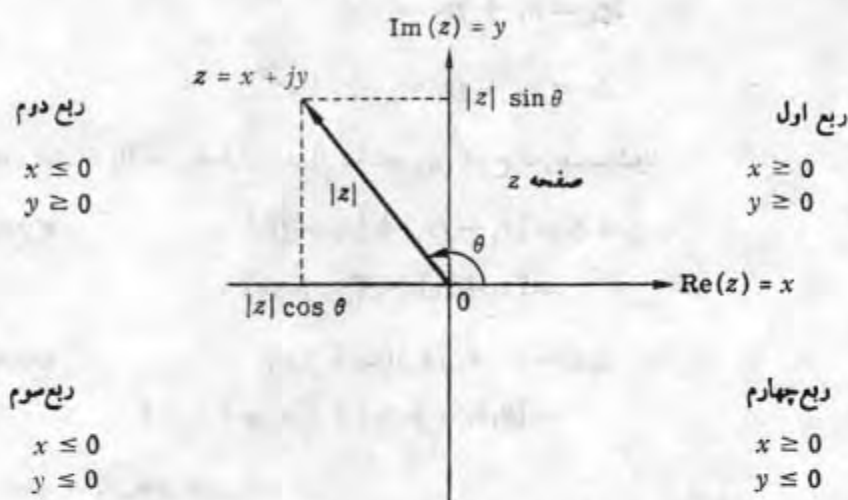
(۱-۴) $|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
 و θ زاویه و یا فاز z نامیده میشود و مقدار آن چنین میباشد:

(۱-۵) $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
 گاهی زاویه θ را بصورت $\angle z$ مینویسیم. برحسب $|z|$ و θ داریم:

(۱-۶) $x = |z| \cos \theta$ $y = |z| \sin \theta$
 این حقایق در شکل (۱-۱) تشریح شده‌اند که در آنجا عدد مختلط z با نقطه‌ای که مختصات آن $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$ میباشد مربوط شده است. توجه کنید که فاز θ زاویه بین محور x و برداری است که از مبدأ شروع شده و به نقطه z ختم میگردد.

تبصره- زاویه θ محدودیه فاصله $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ می‌باشد⁺، و بنابراین θ توسط x , y بطور یکتا تعریف می‌شود. در محاسبه θ با استفاده از رابطه (۱-۵) بایستی بخاطر داشته باشیم که هرگاه $\tan \theta$ معلوم باشد، زاویه θ در فاصله $[0, 2\pi]$ بطور یکتا مشخص نخواهد بود. بعنوان مثال $\tan 26.6^\circ = 0.5$ است، ولی $\tan 206.6^\circ$ نیز مساوی ۰.۵ خواهد بود. برای یکتا مشخص نمودن θ بایستی علامت‌های $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$

⁺ $[0, 2\pi]$ نشان دهنده فاصله $0 \leq \theta < 2\pi$, $[-\pi, \pi]$ نمایشگر فاصله $-\pi < \theta \leq \pi$ می‌باشد.



شکل ۱-۱ = عدد مختلط و نمایش قطبی. هر عدد مختلط z متناظر با نقطه‌ای در صفحه z می‌باشد که می‌تواند توسط جزمهای حقیقی و انگاری خود و یا توسط اندازه و فازش مشخص شود

را در نظر گرفت که مشخص کننده ربعی^(۱) از صفحه مختلط میباشد که z در آن قرار دارد.

تمرین ۱- $\tan \theta$ را برای $0 \leq \theta < 2\pi$ بر حسب θ رسم کنید.

تمرین ۲ = اعداد مختلط زیر را بصورت قطبی بیان کنید: $1 + j0$ ، $1 + j0.5$ ، $1 + j1$ ،

$1 - j1$ ، $1 + j2$ ، $-1 + j2$ و $-1 - j2$

تمرین ۳ = اعداد مختلط زیر را بصورت مختصات قائم بیان کنید (یعنی، $z = x + jy$):

30° ، 150° ، 240° ، 330° ، 180° ، 90° ، 0° و 270° .

۲-۱ عملیات با اعداد مختلط

قواعد عملیات اعداد مختلط همانند عملیات اعداد حقیقی است، بشرط اینکه از رابطه

$-1 = j^2$ استفاده شود. این قواعد همانند میباشند زیرا هم اعداد حقیقی و هم اعداد مختلط

هر دو از اصول یک میدان^(۲) پیروی میکنند (ضمیمه الف، بخش ۱-۲ را ببینید). گیریم:

$$z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$$

دو عدد مختلط باشند. عملیات اعداد مختلط باین شرح تعریف میشوند:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) \quad \text{« جمع »}$$

$$= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \quad \text{« ضرب »}$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

و برحسب نمایش‌های قطبی آنها:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{j\theta_1} |z_2| e^{j\theta_2}$$

$$= |z_1| |z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

تمرین - نشان دهید:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

و:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

« مزدوج مختلط » هرگاه عدد مختلط $z = x + jy$ را داشته باشیم، گوئیم که عدد

مختلط $x - jy$ که با $\bar{z}$ نشان داده می‌شود مزدوج مختلط^(۱) z است. باسانی

دیده می‌شود که هرگاه $z = |z| e^{j\theta}$ باشد آنگاه:

$$\bar{z} = |z| e^{-j\theta}$$

و:

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z - \bar{z} = 2jy$$

و بسیار مهم تر:

$$z \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

و:

$$x = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$$

$$y = \frac{1}{2j} (z - \bar{z})$$

تمرین - مقادیر زیر را حساب نموده و نتایج را، هم بصورت مختصات قائم و هم بصورت مختصات قطبی بیان کنید.

$$\frac{(1+j1)(1+j2)}{j0(1-j1)} \quad \text{و} \quad 2e^{j30^\circ} - e^{-j45^\circ}$$

۲- فازورها و معادلات دیفرانسیل معمولی

۱-۲- نمایش یک سینوسی بوسیله یک فازور

یک « سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω » را بصورت هرتابی از t که درفاصله $(-\infty, \infty)$ تعریف شده و دارای شکل زیر باشد، تعریف کرده‌ایم:

$$A_m \cos(\omega t + \Phi) \quad (2-1)$$

که در آن ثابت‌های حقیقی A_m ، ω و Φ بترتیب دامنه، فرکانس زاویه‌ای^(۱) و فاز سینوسی نامیده می‌شوند.

منظور از آنچه که بیان خواهد شد، بدست آوردن قضیه مهم زیر است.

قضیه اصلی مجموعه جبری هرتعداد از سینوسی‌ها با « فرکانس زاویه‌ای یکسان »، مثلاً ω ، و هرتعداد از مشتق‌های آنها از هر مرتبه، خود یک سینوسی با « همان » فرکانس زاویه‌ای ω می‌باشد.

مثال ۱ - تابع $f(t)$ را که برای تمام مقادیر t بصورت زیر تعریف میشود

در نظر بگیرید:

$$f(t) = 2 \cos(2t + 60^\circ) - t \sin 2t + \frac{d}{dt} 2 \sin 2t$$

توجه کنید که f مجموع دوسینوسی و مشتق سینوسی دیگر است که هریک از این سینوسی‌ها دارای فرکانس یکسان $\omega = 2$ رادیان بر ثانیه میباشند. قضیه اصلی بیان میدارد که تابع f را میتوان بصورت یک سینوسی تنها با «همان» فرکانس زاویه‌ای نشان داد. برای بررسی این حقیقت با بسط مستقیم جمله کسینوسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cos 2t \cos 60^\circ - 2 \sin 2t \sin 60^\circ - t \sin 2t + t \cos 2t \\ &= \cos 2t - \sqrt{3} \sin 2t - t \sin 2t + t \cos 2t \\ &= \cos 2t - (t + \sqrt{3}) \sin 2t \\ &= \sqrt{0^2 + (t + \sqrt{3})^2} \cos(2t + \tan^{-1} \frac{t + \sqrt{3}}{0}) \\ &= 7.6 \cos(2t + 48.8^\circ) \end{aligned}$$

که بصورت داده شده در معادله (۲-۱) میباشد.

اثبات قضیه اصلی در انتهای این زیربخش داده خواهد شد. ابتدا میخواهیم راجع به استنباطهای قضیه اصلی بحث کنیم. این قضیه بیان میدارد که میتوان روش‌های جبری را به سینوسی‌ها اعمال نمود. نخست توجه کنید که یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω ، با دامنه A_m و فاز Φ بطور کامل مشخص میشود، و بدینجهت فکر «نمایش» یک سینوسی بوسیله عدد مختلط $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ برای ما حاصل میگردد. توجه کنید که $A_m = |A|$ اندازه عدد مختلط A و $\Phi = \angle A$ فاز آن است. عبارت دقیق‌تر، سینوسی $x(t) \triangleq A_m \cos(\omega t + \Phi)$ توسط عدد مختلط $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ «نمایش» داده میشود و برعکس با داشتن عدد مختلط $A = A_m e^{j\Phi}$ و فرکانس زاویه‌ای ω ، سینوسی را میتوان چنین بدست آورد.

$$(2-2) \quad x(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$$

در واقع :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)}) \\ &= \operatorname{Re}[A_m \cos(\omega t + \Phi) + jA_m \sin(\omega t + \Phi)] \\ (2-2) \quad &= A_m \cos(\omega t + \Phi) = x(t)\end{aligned}$$

توجه کنید که در مرحله آخر از «حقیقی» بودن A_m ، ω ، t و Φ استفاده کرده ایم. برای راحتی، عدد مختلط A که سینوسی $A_m \cos(\omega t + \Phi)$ را نشان میدهد، فازور^(۱) نمایش دهنده سینوسی خوانده میشود. برحسب تعریف فازور A با $A = A_m e^{j\Phi}$ بیان میشود.

مثال ۲-۲ گیریم $v(t) = 110\sqrt{2} \cos(2\pi 60t + \frac{\pi}{3})$ ولت باشد. در اینصورت

فازور نمایش دهنده سینوسی چنین است :

$$A = 110\sqrt{2} e^{j(\frac{\pi}{3})}$$

یعنی :

$$v(t) = \operatorname{Re}(Ae^{j2\pi 60t})$$

تبصره ۱-۱ بایستی تأکید شود که دانستن نمایش فازوری یک سینوسی، تنها مقادیر دامنه و فاز آنرا مشخص میسازد و اطلاعاتی از فرکانس بدست نمیدهد. بنابراین هنگام محاسبات با فازورها، بایستی فرکانس فازورها را در نظر داشت.

تبصره ۲-۲ بطریقی دیگر، هرگاه یک سینوسی را بجای تابع کسینوس با تابع سینوس مشخص کنیم داریم :

$$y(t) = A_m \sin(\omega t + \Phi)$$

در اینصورت نیز نمایش فازوری $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ بقوت خود باقی است، معیاد خود سینوسی را بایستی از رابطه زیر دوباره بدست آورد :

$$y(t) = \text{Im}(Ae^{j\omega t})$$

در این کتاب منحصرآ از نمایش جزء حقیقی استفاده شده است.

تقریباً ۳۵- می‌خواهیم در صفحه مختصات مختلط، تابع $Ae^{j\omega t}$ را رسم کنیم. مختصات

عدد مختلط $Ae^{j\omega t}$ چنین اند :

$$x(t) = \text{Re}(Ae^{j\omega t}) \quad y(t) = \text{Im}(Ae^{j\omega t})$$

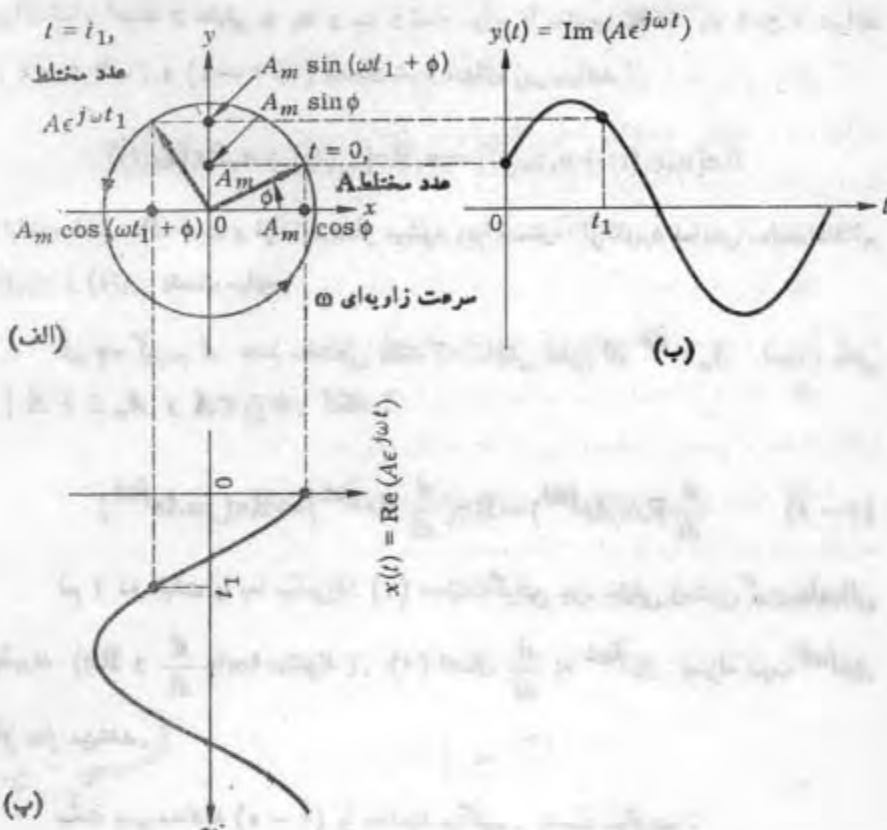
میتوان $x(t)$ را تصویر نقطه $Ae^{j\omega t}$ روی محور x دانست که این نقطه با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه، روی دایره‌ی بشاع A_m در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، چنانکه در شکل (۱-۲) نشان داده شده است دوران میکند و بدینجهت $Ae^{j\omega t}$ را میتوان یک فازور دوار نامید. بهمین ترتیب تصویر نقطه $Ae^{j\omega t}$ روی محور y ، $y(t)$ را خواهد داد.

کاربرد عمده نمایش فازوری سینوسی‌ها در محاسبه «جواب خاص معادلات دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب حقیقی ثابت»، در حالتی که تابع تحریک یک سینوسی است، میباشد. بعبارت دیگر، معادله دیفرانسیل دارای چنین شکلی است :

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, A_m, \omega$ و Φ «ثابت‌های حقیقی» میباشند. در واقع بموجب قضیه‌ای که قبلاً بیان شد هرگاه بجای x یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ی ω را در سمت چپ جایگزین کنیم، آنگاه تمام سمت چپ نیز معادل یک سینوسی با فرکانس ω خواهد بود و این درست همان است که سمت راست معادله لازم میدارد. بنابراین، تنها مسأله واقعی، محاسبه دامنه و فاز سینوسی است که جواب خاص میباشد. برای این کار از فازورها استفاده میکنیم و این روش را، روش فازوری^(۱) مینامند.

بجای اینکه مستقیماً وارد محاسبات شویم، ابتدا سه لم^(۲) را که نشان دهنده کارایی روش فازوری میباشند بدقت بیان خواهیم کرد.



شکل ۱-۲- نمایش فازور دوار $A_m e^{j\omega t}$ ، (الف) میتوان $A_m e^{j\omega t}$ را بصورت یک

بردار دوار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت با فرکانس زاویه‌ای ω در نظر گرفت.

(ب) تصویر آن روی محور x . (پ) تصویر آن روی محور y

لم ۱- $\text{Re}[\dots]$ «جمع پذیر» و «همگن» است. بعبارت دیگر، گیریم z_1 و z_2

توابع دلخواه با مقادیر مختلطی از متغیر حقیقی t باشند و گیریم α یک عدد «حقیقی» باشد. «جمع پذیری» بدین معنی است که برای تمام چنین توابع z_1 و z_2 و تمام مقادیر t :

$$\text{Re}[z_1(t) + z_2(t)] = \text{Re}[z_1(t)] + \text{Re}[z_2(t)] \quad (۱-۲ الف)$$

و «همگنی» بدین معنی است که برای تمام اعداد «حقیقی» α و تمام مقادیر t :

$$\text{Re}[\alpha z_1(t)] = \alpha \text{Re}[z_1(t)] \quad (۱-۲ ب)$$

برای تمام اعداد «حقیقی» α_1 و α_2 و تمام توابع با مقادیر مختلط z_1 و z_2 ، شرایط (۴-۲ الف) و (۴-۲ ب) معادل شرط تنهای زیر میباشد:

$$\operatorname{Re}[a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t)] = a_1 \operatorname{Re}[z_1(t)] + a_2 \operatorname{Re}[z_2(t)]$$

اثبات مطلب ساده است و از آن صرف‌نظر میشود زیرا مستقیماً از کاربرد نمایش مختصات قائم‌الزاویه $z_1(t)$ و $z_2(t)$ بدست می‌آید.

لم ۲-۲. گیریم A عدد مختلطی باشد که نمایش قطبی آن $A_m e^{j\Phi}$ است، یعنی $A_m \triangleq |A|$ و $\Phi \triangleq \angle A$. آنگاه:

$$(۲-۵) \quad \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} A e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Re}(j\omega A e^{j\omega t})$$

لم ۲. دو حقیقت را به ما می‌آموزد: (۱) عملیات گرفتن جزء حقیقی و مشتق‌گیری جابجائی پذیرند Re و $\frac{d}{dt}$ جابجا میشوند. (۲) اعمال $\frac{d}{dt}$ به $A e^{j\omega t}$ بمنزله ضرب $A e^{j\omega t}$ در $j\omega$ میباشد.

سمت چپ معادله (۲-۵) را محاسبه میکنیم. بدست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)})$$

$$= \frac{d}{dt} [A_m \cos(\omega t + \Phi)]$$

$$= -\omega A_m \sin(\omega t + \Phi)$$

$$= \operatorname{Re}(j\omega A_m e^{j(\omega t + \Phi)})$$

$$= \operatorname{Re}(j\omega A e^{j\omega t})$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} A e^{j\omega t}\right)$$

اکنون حالت معکوس را اثبات میکنیم. در اینجا فرض چنین است که $A=B$ ، و باید نشان دهیم:

$$\operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

این نتیجه آنی است، چون $A=B$ لازم میدارد که:

$$Ae^{j\omega t} = Be^{j\omega t} \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

و بنابراین:

$$\operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

«اثبات قضیه اصلی» برای سهولت حالت خاصی از سه سینوسی را در نظر بگیرید:

$$x(t) \triangleq A_m \cos(\omega t + \Phi_1) = \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t})$$

$$y(t) \triangleq B_m \cos(\omega t + \Phi_2) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t})$$

$$z(t) \triangleq C_m \cos(\omega t + \Phi_3) = \operatorname{Re}(Ce^{j\omega t})$$

بنابراین:

$$A \triangleq A_m e^{j\Phi_1} = A_r + jA_i$$

$$B \triangleq B_m e^{j\Phi_2} = B_r + jB_i$$

$$C \triangleq C_m e^{j\Phi_3} = C_r + jC_i$$

که A ، B و C سه فازوری هستند که به ترتیب سینوسی‌های x ، y و z را نشان میدهند.

می‌خواهیم $x(t) + y(t) + \frac{d}{dt} z(t)$ را محاسبه کنیم. این مجموع را $\Sigma(t)$ مینامیم. در اینجا به صورت:

$$\Sigma(t) = \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) + \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(Ce^{j\omega t})$$

از لم ۲، جمله سوم را میتوان چنین نوشت:

$$\operatorname{Re}(j\omega C e^{j\omega t})$$

با بکاربردن لم ۱، بدست میآید:

$$\sum(t) = \operatorname{Re}[(A + B + j\omega C) e^{j\omega t}]$$

بنابراین $\sum'(.)$ یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. همچنین $\sum(0)$ شکل

$\operatorname{Re}(S e^{j\omega t})$ است که در آن:

$$S = S_m e^{j\phi} = S_r + jS_i$$

S فازوری است که سینوسی $\sum(0)$ را نشان میدهد. مطابق لم ۳، عدد مختلط S با

$S = A + B + j\omega C$ بیان میشود. معادله آخر چنین لازم میدارد: هرگاه جزءهای حقیقی

و انکاری را در نظر بگیریم، بدست میآید:

$$S_r = A_r + B_r - \omega C_i$$

$$S_i = A_i + B_i + \omega C_r$$

$$S_m = \sqrt{(A_r + B_r - \omega C_i)^2 + (A_i + B_i + \omega C_r)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{A_i + B_i + \omega C_r}{A_r + B_r - \omega C_i}$$

که در آن ϕ مطابق قاعده‌ای که قبلاً بیان شد در ربع انتخاب شده واقع است.

روشن است که میتوان استدلال را برای مجموع هرتعداد سینوسی با فرکانس یکسان

و هرتعداد مشتق آنها از هر مرتبه، تعمیم داد.

تمرین ۱ - با استفاده از فرمول‌های استاندارد مثلثاتی نشان دهید:

$$A_m \cos \omega t + B_m \sin \omega t = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \cos(\omega t - \Phi)$$

که در آن Φ با $\tan \Phi = \frac{B_m}{A_m}$ تعیین میگردد و ربعی که Φ در آن قرار دارد با روابط زیر

مشخص میگردد:

$$\cos \Phi = \frac{A_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}} \quad \sin \Phi = \frac{B_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}}$$

تمرین ۲- همین نتایج را با استفاده از فازورها بدست آورید.

۲-۲- کاربرد روش فازوری در معادلات دیفرانسیل

چنانکه در ابتدای این بخش گفته شد، روش فازوری راحت‌ترین روش برای بدست آوردن جواب خاص یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی ثابت، وقتی که تابع تحریک سینوسی است، میباشد. معادله زیر را در نظر بگیرید:

(۱۰-۲)

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

که $a_0, a_1, \dots, a_n, A_m, \omega$ و Φ ثابت‌های حقیقی میباشند. با بکار بردن فازورها چنین قرار می‌دهیم:

$$(۱۱-۲) \quad A \triangleq A_m e^{j\Phi} \quad \text{و} \quad X \triangleq X_m e^{j\psi}$$

با جایگزین نمودن $\text{Re}(X e^{j\omega t})$ بجای $x(t)$ در معادله دیفرانسیل بدست می‌آوریم:

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} \text{Re}(X e^{j\omega t}) + \dots + a_n \text{Re}(X e^{j\omega t}) = \text{Re}(A e^{j\omega t})$$

از لم ۱، میتوان نوشت:

$$\frac{d^n}{dt^n} \text{Re}(a_0 X e^{j\omega t}) + \dots + \text{Re}(a_n X e^{j\omega t}) = \text{Re}(A e^{j\omega t})$$

با کاربرد مکرر لم ۲، بدست می‌آوریم:

$$\text{Re}[a_0 (j\omega)^n X e^{j\omega t}] + \dots + \text{Re}(a_n X e^{j\omega t}) = \text{Re}(A e^{j\omega t})$$

مجدداً با استفاده از لم ۱، داریم:

$$\operatorname{Re}\{[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]X e^{j\omega t}\} \\ = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$$

لم ۳، معادله جبری برای X را چنین بدست میدهد.

$$(الف \ ۲-۱۲) \quad [a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]X = A$$

یا :

$$(ب \ ۲-۱۲) \quad X = \frac{A}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n}$$

بنابراین انداز X چنین است :

$$(الف \ ۲-۱۲)$$

$$X_m = \frac{A_m}{\left[\underbrace{(a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots)^2}_{\text{توانهای زوج } \omega} + \underbrace{(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots)^2}_{\text{توانهای فرد } \omega} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

و فاز نیز چنین خواهد بود :

$$(ب \ ۲-۱۲) \quad \psi = \Phi - \tan^{-1} \frac{a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots}{a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots}$$

که در آن زاویه نشان داده شده با $\tan^{-1}(\cdot)$ مطابق قاعده‌ای که قبلاً بیان شد در ربع انتخاب شده قرار دارد.

تبصره ۵ = معادله (۲-۱۲ الف) را میتوان برای X حل نمود و جوابی را که در معادله (۲-۱۲ ب) داده شده بدست آورد. با شرط اینکه ω چنان باشد که :

$$a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n \neq 0$$

اگر برای ω موردنظر این چند جمله‌ای صفر باشد، $j\omega$ یک فرکانس طبیعی بوده و در نتیجه یک جواب خاص بصورت $tA \cos(\omega t + \Phi)$ بایستی درنظر گرفت (بخش ۲-۳ ضمیمه پ را ببینید).

میتوان باسانی مطالب قبل را در مورد یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان با یک ورودی w و یک خروجی y چنانکه توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف میشود تعمیم داد.

$$(۲-۱۴) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \dots + b_m w$$

که در آن $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ اعداد حقیقی هستند. اگر ورودی یک سینوسی بصورت داده شده زیر باشد:

$$(۲-۱۵) \quad w(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \Phi)$$

که در آن:

$$(۲-۱۵) \quad A \triangleq |A| e^{j\Phi}$$

آنگاه یک جواب خاص معادله (۲-۱۴) باینصورت است:

$$(۲-۱۶) \quad y(t) = \operatorname{Re}(B e^{j\omega t}) = |B| \cos(\omega t + \psi)$$

که در آن:

$$(۲-۱۶) \quad B \triangleq |B| e^{j\psi}$$

ارتباط میان ورودی که بر حسب فازور A بیان شده و قسمتی از خروجی (فقط جواب خاص) که با فازور B نشان داده شده را میتوان از معادله زیر بدست آورد.

$$(۲-۱۷) \quad [(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n]B = [b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m]A$$

معادله (۲-۱۷) با «تعویض مشتق k ام $w(t)$ توسط $(j\omega)^k A$ برای $k=0$ تا m ، و تعویض مشتق k ام $y(t)$ توسط $(j\omega)^k B$ برای $k=0$ تا n » از معادله (۲-۱۴) مستقیماً بدست آمده است. بنابراین دراصل، تعیین یک جواب خاص که بصورت معادله (۲-۱۶) بیان میشود بهسولت از معادله (۲-۱۷) انجام پذیر است. تنها کار لازم،

عملیاتی با اعداد مختلط است تا بتوان جواب را به شکل معادله (۱۶-۲ الف) درآورد.

مثال ۳- مدار RLC سری خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل

(۲-۲) را در نظر بگیرید. گیریم ورودی، منبع ولتاژ سینوسی زیر باشد:

$$e_s(t) = \text{Re}(E e^{j\omega t}) = |E| \cos(\omega t + \Phi)$$

فرض کنید ولتاژ خروجی را ولتاژ دوسرخازن در نظر بگیریم. در این صورت معادله دیفرانسیل برای تمام مقادیر t چنین است:

$$(۲-۱۸) \quad LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = e_s(t)$$

ویک جواب خاص به شکل زیر است:

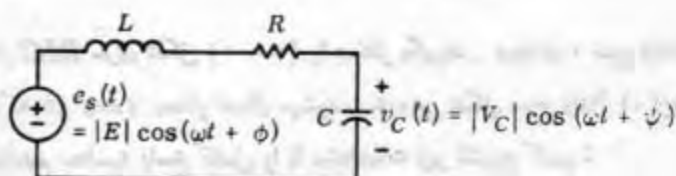
$$(۲-۱۹) \quad v_C(t) = \text{Re}(V_C e^{j\omega t}) = |V_C| \cos(\omega t + \psi)$$

رابطه میان فازور خروجی V_C که بایستی تعیین گردد و فازور ورودی E که معلوم است به شکل زیر می باشد:

$$(۲-۲۰) \quad [LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1] V_C = E$$

توجه کنید که معادله (۲-۲۰) با جایگذاری $e_s(t)$ با E و مشتق k ام $v_C(t)$ با $(j\omega)^k V_C$ در معادله (۲-۱۸) بدست می آید. بنابراین:

$$(۲-۲۱) \quad V_C = \frac{E}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$



شکل ۲-۲ مدار RLC سری در حالت دائمی سینوسی

و بنابراین اندازه و فاز V_C چنین است :

$$|V_C| = \frac{|E|}{[(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\psi = \Phi - \tan^{-1} \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$$

جواب $v_C(t)$ که بصورت یک تابع حقیقی از زمان بیان میشود بسهولت از معادله (۱۹-۲) بدست میآید .

۳ پاسخ کامل و پاسخ حالت دائمی سینوسی

۳-۱ پاسخ کامل

یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، با ورودی سینوسی، پاسخ کاملی بشکل زیر دارد:

$$(۳-۱) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

که در آن جواب خاص انتخاب شده $y_p(t)$ یک سینوسی است که دارای همان فرکانس ورودی میباشد و $y_h(t)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن میباشد. با فرض اینکه تمام فرکانس‌های طبیعی مدار متمایز باشند (یعنی معادله مشخصه ریشه‌های مکرر نداشته باشد) داریم:

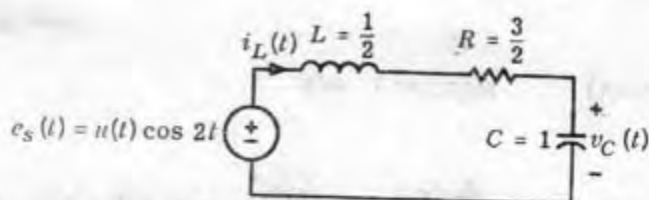
$$(۳-۲) \quad y_h(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t}$$

که در آن s_i ها فرکانس‌های طبیعی و k_i ها ثابت‌های دلخواه میباشند که بایستی از شرایط اولیه تعیین شوند. جواب خاص $y_p(t)$ از بکاربردن نمایش فازوری یک سینوسی مطابق روشی که در بخش قبل نشان داده شد بسهولت بدست میآید. این گونه تجزیه پاسخ کامل توسط مثال زیر تشریح میگردد.

مثال ۱- مدار RLC سری شکل (۳-۱) را در نظر بگیرید. ورودی، منبع ولتاژ

سینوسی $e_s(t)$ است که در $t=0$ بمدار اعمال میشود. خروجی شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ خازن میباشد. میخواهیم محاسبه پاسخ کامل را با مشخصات زیر تشریح کنیم:

$$e_s(t) = u(t) \cos \omega t$$



شکل ۳-۱ مدار RLC سری که محاسبه پاسخ کامل را تشریح میکند. حالت اولیه با $i_L(0_-) = 2$ و $v_C(0_-) = 1$ مشخص میشود

$$C = 1 \text{ فاراد} \quad R = \frac{3}{2} \text{ اهم} \quad L = \frac{1}{2} \text{ هانری}$$

$$i_L(0_-) = I_0 = 2 \text{ آمپر} \quad v_C(0_-) = V_0 = 1 \text{ ولت}$$

به تابع پله واحد $u(\cdot)$ که بصورت فاکتوری در رابطه e_s وجود دارد توجه کنید. این فاکتور برای توصیف اینکه ورودی e_s در لحظه $t=0$ به مدار اعمال میشود ضروری است، یعنی، برای $t < 0$ ، $e_s(t) = 0$ میباشد.

ابتدا طرز نوشتن معادله دیفرانسیل و تعیین شرایط اولیه لازم را مرور میکنیم.

KVL داریم:

$$(۳-۲) \quad L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + v_C(t) = e_s(t)$$

چون جریان i_L ، همان جریان درون خازن نیز میباشد داریم:

$$(۳-۳) \quad i_L(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

بنابراین، معادله (۳-۲) چنین میشود:

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = e_s(t)$$

و یا، با قراردادن مقادیر عددی،

$$(۳-۴) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dv_C}{dt} + v_C = u(t) \cos 2t$$

شرایط اولیه چنین است:

$$(۱-۲) \quad v_C(0_-) = 1 \quad \text{وات}$$

و:

$$(۲-۲) \quad \frac{dv_C(0_-)}{dt} = \frac{i_L(0_-)}{C} = 2 \quad \text{ولت بر ثانیه}$$

معادلات (۲-۱) و (۲-۲) خروجی v_C را کاملاً توصیف میکنند. پاسخ کامل نیز به سبب سهولت بدست می‌آید. معادله مشخصه بصورت $s^2 + \frac{3}{2}s + 1$ می‌باشد و ریشه‌های طبیعی $s_1 = -1$ و $s_2 = -2$ خواهند بود. بنابراین جواب معادله همگن بشکل زیر است:

$$(۲-۳) \quad v_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}$$

واحدترین جواب خاص چنین است:

$$(۲-۴) \quad v_p(t) = \operatorname{Re}(V e^{j2t}) = |V| \cos(2t + \psi)$$

که در آن V نمایشگر فازور متغیر خروجی بوده و فازور ولتاژ خروجی ناسیده میشود. ورودی را نیز برحسب فازور ولتاژ E چنین نشان میدهیم:

$$e_s(t) = \operatorname{Re}(E e^{j2t}) = \cos 2t$$

که $E = 1 e^{j0}$ میباشد. فازور ولتاژ V ، مطابق قاعده‌ای که در بخش قبل بیان شد، به سبب سهولت از معادله (۲-۱) بدست می‌آید [جایگزین کردن مشتق k ام v_C با $(j\omega)^k V$] بنابراین:

$$\left[\frac{1}{2} (j\omega)^2 + \frac{3}{2} (j\omega) + 1 \right] V = E$$

یا

$$(۲-۵) \quad V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\omega^2 + j\frac{3}{2}\omega}$$

با $\omega = 2$ ،

$$V = \frac{1}{-1 + j3} = 0.316 e^{-j1.1071 \text{ rad}}$$

از معادله (۸-۳) جواب خاص بدست میآید

$$(3-10) \quad v_p(t) = 0.316 \cos(2t - 1.1071 \text{ rad})$$

جواب کامل چنین است:

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

$$(3-11) \quad = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 1.1071 \text{ rad})$$

ثابت‌های k_1 و k_2 از معادلات (۶-۲ الف) و (۶-۲ ب) بدست میآیند. از (۶-۲ الف) و (۱۱-۳) داریم:

$$v_C(0) = 1 = k_1 + k_2 + 0.316 \cos(-1.1071 \text{ rad})$$

یا

$$k_1 + k_2 = 1.1$$

از معادلات (۶-۲ ب) و (۱۱-۳) داریم

$$\frac{dv_C}{dt}(0) = 2 = -k_1 - 2k_2 - 0.316 \times 2 \sin(-1.1071 \text{ rad})$$

یا

$$k_1 + 2k_2 = -1.4$$

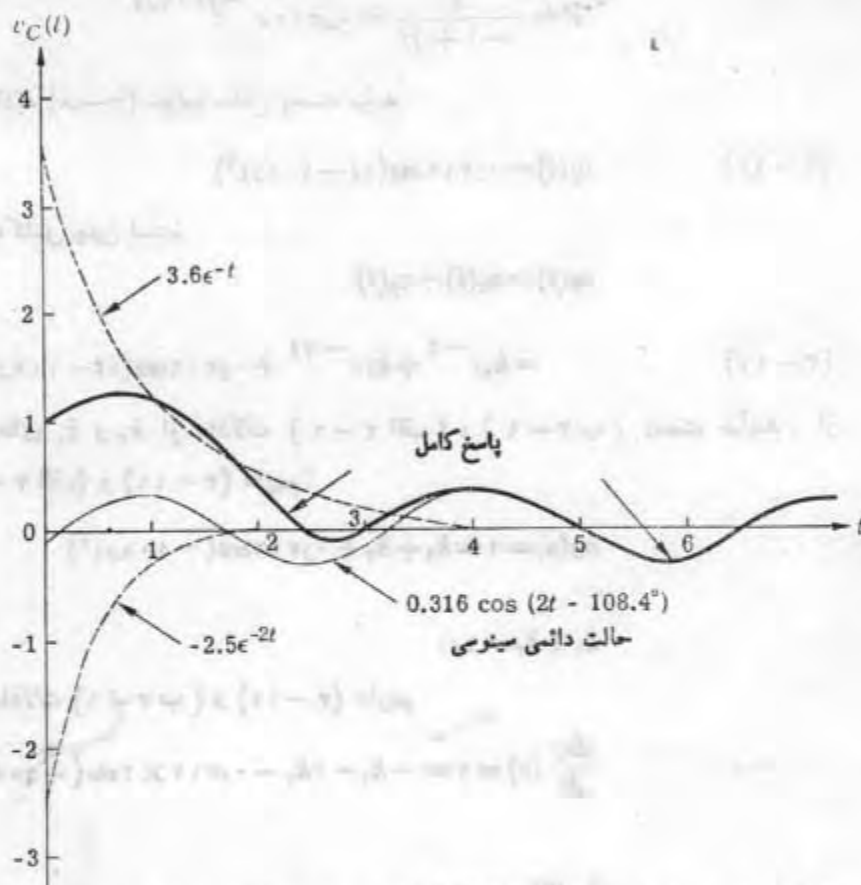
بنابراین:

$$k_1 = 3.26 \quad \text{و} \quad k_2 = -2.9$$

جواب کامل چنین است:

$$(3-12) \quad v_C(t) = 3.26 e^{-t} - 2.9 e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 1.1071 \text{ rad})$$

نمایش $v_C(t)$ در شکل (۲-۳) داده شده است. توجه کنید که پاسخ کامل را میتوان بدو مولفه مجزای حالت گذرا و حالت دائمی تقسیم نمود. حالت گذرا همانند v_h از معادله (۷-۳) است و حالت دائمی همانند v_p از معادله (۱۰-۳) میباشد. همچنین توجه شود که برای $t > 4$ ثانیه، پاسخ کامل اساساً، پاسخ حالت دائمی سینوسی میباشد.



شکل ۳-۲-۳ پاسخ کامل $v_C(0)$ (نشان داده شده توسط خط کلفت) برابر مجموع حالت دائمی سینوسی (خط نازک) و جملات حالت گذرا (خطوط نقطه چین) میباشد

تبصره ۵- در بعضی مدارهای ساده میتوان حالت اولیه را چنان انتخاب نمود که پاسخ حالت دائمی سینوسی بلافاصله پس از اعمال ورودی حاصل شود. بعبارت دیگر، جمله حالت گذرا متحد با صفر باشد. روش انتخاب حالت اولیه برای این مقصود برپایه دو واقعیت قرارداد (بخش‌های ۳ و ۴ فصل دوم را ببینید) : (۱) برای جریان کراندار، ولتاژ دو سر یک خازن نمیتواند بطور لحظه‌ای تغییر کند و (۲) برای ولتاژ کراندار جریان داخل یک سلف نمیتواند بطور لحظه‌ای تغییر کند.

تمرین ۱- گیریم در شکل (۱-۳) اندوکتانس L برابر صفر باشد و بنابراین یک مدار RC سری بدست میآید. ولتاژ اولیه $v_C(0_-)$ دوسرخازن را چنان انتخاب کنید که پس از اعمال ورودی e هیچ حالت گذرانی موجود نباشد.

تمرین ۲- مدار شکل (۱-۳) را با $L = \frac{1}{\gamma}$ هانری، مانند مثال ۱ در نظر بگیرید. آیا ممکن است حالت اولیه $i_L(0_-)$ و $v_C(0_-)$ را چنان انتخاب نمود که پس از اعمال ورودی e هیچ حالت گذرانی موجود نباشد؟ اگر چنین است، حالت اولیه را تعیین کنید.

۳-۲ پاسخ حالت دائمی سینوسی

مدار خطی تغییرناپذیر با زمان دلخواه را که با یک منبع سینوسی تنها تحریک میشود در نظر میگیریم. فرض کنید یکی از متغیرهای خاص شبکه مثلاً y مورد توجه ما میباشد. پاسخ y به ورودی سینوسی و حالت اولیه مشخص شده بشکل زیر است:

$$(۱۳-۳) \quad y(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \dots + k_n e^{s_n t} + A_m \cos(\omega t + \psi)$$

که در آن، بمنظور سهولت فرض کرده‌ایم که فرکانس‌های طبیعی ساده میباشند، و $k_1, k_2, \dots, k_n$ ثابت‌هایی هستند که به حالت اولیه بستگی دارند و دامنه A_m و زاویه ψ جواب خاص، بسادگی از روش فازوری بدست میآیند.

مشاهده نکته زیر بسیار حایز اهمیت است. فرض کنید که تمام فرکانس‌های طبیعی در نیم صفحه باز چپ + فرکانس‌های مختلط قرار دارند در این صورت وقتی $t \rightarrow \infty$ ، در معادله (۱۳-۳) جملات $k_1 e^{s_1 t}, k_2 e^{s_2 t}, \dots, k_n e^{s_n t}$ بسمت صفر میل میکنند. عبارت دیگر، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $y(t)$ بطور دلخواه به سینوسی $A_m \cos(\omega t + \psi)$ نزدیک میشود. این امر ما را مجاز میدارد که حقیقت بسیار مهم زیر را بیان کنیم:

+ نیم صفحه «باز» چپ، شامل نیم صفحه چپ مختصات مختلط میباشد که محور انگاری از آن «حذف شده» است. عبارت دیگر، نیم صفحه باز چپ، شامل تمام نقاطی است که جزء حقیقی آنها منفی میباشد.

«صرفنظر از حالت اولیه و مشروط بر اینکه تمام فرکانس‌های طبیعی در نیم صفحه بازچپ واقع باشند، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، پاسخ سینوسی خواهد شد. این پاسخ سینوسی را پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌نامند. پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان به‌سبب از روش فازوری محاسبه نمود».

چنانکه در مثال ۱ دیده‌ایم، حالت دائمی سینوسی با فازور V در معادله $(9-3)$ توصیف میگردد و پاسخ حالت دائمی سینوسی توسط جواب خاص بدست آمده از روش فازوری، یعنی، $v_p(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$ داده میشود.

بر مبنای ملاحظات فوق، میتوان مانند فصل پنجم، بیان زیر را پذیرفت. وقتی تمام فرکانس‌های طبیعی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در «نیم صفحه بازچپ» باشند، گوئیم مدار پایدار مجانبی^(۱) است. اگر یک یا چند فرکانس طبیعی آن در «نیم صفحه باز راست» واقع باشند گوئیم که مدار ناپایدار^(۲) است. بنابراین وقتی $t \rightarrow \infty$ ، هر پاسخ ورودی صفریک مدار پایدار مجانبی به سمت صفر میل میکند. برای مدارهای ناپایدار فقط میتوان بیان نمود که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، برای بسیاری از حالت‌های اولیه، پاسخ ورودی صفر به سمت بینهایت میل میکند.

بنابراین، نتیجه مهم اینست که برای مدارهای «پایدار مجانبی» که توسط یک ورودی سینوسی تنها تحریک میشوند، حالت اولیه هرچه باشد وقتی $t \rightarrow \infty$ ، هر متغیر مدار به سمت حالت دائمی سینوسی متناظر میل میکند. این حقیقت را با این جمله بیان میکنیم «مدارهای پایدار مجانبی دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌باشند».

تبصره ۵- هرگاه مدار علاوه بر فرکانس‌های طبیعی واقع در نیم صفحه بازچپ، دارای فرکانس‌هایی از نوع انگاری خالص هم باشد، بازگاهی اوقات میتوان پاسخ حالت دائمی را تعریف نمود. برای درک این تبصره لازم است حل معادلات دیفرانسیلی را که ریشه‌های مشخصه انگاری خالص و یا ریشه‌های مکرر دارند مرور نمود. برای تشریح این دو حالت متفاوت دو مثال زیر را بررسی میکنیم:

مثال ۲- گیریم چند جمله‌ای مشخصه یک معادله دیفرانسیل بصورت زیر باشد.

$$(s^2 + \omega_0^2)^{-1} = s^{-2} + 2\omega_0^{-2}s^{-1} + \omega_0^{-4}$$

ریشه‌های مشخصه $s_1 = s_2 = j\omega_0$ و $s_3 = s_4 = -j\omega_0$ میباشند. جواب معادله دیفرانسیل ممکن چنین است:

$$y_h(t) = (k_1 + k_2 t)e^{j\omega_0 t} + (k_3 + k_4 t)e^{-j\omega_0 t}$$

که میتوان برحسب کسینوس بصورت زیر نیز نوشت:

$$y_h(t) = K_1 \cos(\omega_0 t + \Phi_1) + K_2 t \cos(\omega_0 t + \Phi_2)$$

که در آن، K_1 ، K_2 ، Φ_1 و Φ_2 ثابت‌های حقیقی میباشند. واضح است که وقتی t زیاد میشود، $y_h(t)$ مقادیر دلخواه بزرگی بخود میگیرد که نشان میدهد مدار ناپایدار است. برای مقادیر بزرگ t ، در جواب کامل $y = y_h + y_p$ ، y_p در مقابل y_h قابل صرفنظر میباشد. از این مثال نتیجه میگیریم که هرگاه مداری دارای فرکانسهای طبیعی مکرر باشد که روی محور انگاری قرار گیرند، این مدار ناپایدار بوده و دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی نیست.

مثال ۳- گیریم چند جمله‌ای مشخصه یک معادله دیفرانسیل بصورت $s^2 + \omega_0^2$

باشد. ریشه‌های مشخصه $s_1 = j\omega_0$ و $s_2 = -j\omega_0$ میباشند. فرض کنید تابع تحریک یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω باشد که $\omega \neq \omega_0$ است. آنگاه جواب کامل بصورت زیر است:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

که در آن:

$$y_h(t) = k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t} = K \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

که K و Φ ثابت‌های حقیقی میباشند و جواب خاص که از روش فازوری بدست میآید بصورت زیر است:

$$y_p(t) = B \cos(\omega t + \psi)$$

B و ψ ثابت‌های حقیقی میباشند. توجه کنید که y_h نوسانی بوده و بنابراین نمیتواند

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

به‌عنوان قسمت گذرای پاسخ کامل در نظر گرفته شود. اما با این حال، « ρ یک سینوسی با همان فرکانس ورودی بوده و بنابراین می‌تواند بعنوان پاسخ حالت دائمی سینوسی تعریف شود، اگرچه پاسخ کامل شامل سینوسی دیگری با فرکانس متفاوت می‌باشد. این نوع پاسخ حالت دائمی سینوسی را می‌توان با یک گیرنده تطبیق شده (۱) مناسب آشکار نمود.

از طرف دیگر، هرگاه فرکانس زاویه‌ای ω ورودی بر ω_0 منطبق گردد، پاسخ کامل دارای جمله $A \cos(\omega t + \theta)$ خواهد بود که با زیاد شدن t بطور دلخواه زیاد می‌شود، و بنابراین پاسخ حالت دائمی وجود نخواهد داشت. از این مثال نتیجه می‌گیریم که اگر مدار دارای یک فرکانس طبیعی انگاری مثلاً در ω_0 باشد که ریشه ساده معادله مشخصه است و اگر فرکانس زاویه‌ای ω ورودی سینوسی، مساوی ω_0 نباشد، آنگاه پاسخ حالت دائمی سینوسی بخوبی معین است.

بطور خلاصه، «یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که تمام فرکانس‌های طبیعی آن در داخل نیم صفحه باز چپ صفحه فرکانس مختلط واقع باشند، وقتی که توسط یک ورودی سینوسی تحریک شود، دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی خواهد بود. بعلاوه اگر مدار دارای فرکانس‌های طبیعی انگاری ساده‌ای باشد که با فرکانس زاویه‌ای سینوسی ورودی متفاوت باشند، پاسخ حالت دائمی با زهم وجود خواهد داشت».

«پاسخ حالت دائمی سینوسی همیشه همان فرکانس ورودی را داشته و می‌تواند به مناسب‌ترین وجهی از روش فازوری بدست آید».

تبصره ۵- برای مدارهای خطی «تغییرپذیر با زمان» ویا مدارهای «غیرخطی» پاسخ حالت دائمی یک ورودی سینوسی (اگر وجود داشته باشد) معمولاً سینوسی نخواهد بود. این پاسخ ممکن است شامل چندین سینوسی باشد، حتی سینوسی‌هایی که فرکانس‌های آنها جزئی از فرکانس ورودی باشند (برای مثال، مسائل ۳، ۴ و ۵ این فصل را ببینید).

۳-۳ جمع آثار در حالت دائمی

حالتی را در نظر بگیرید که در آن یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که تمام فرکانس‌های طبیعی آن در نیم صفحه باز چپ قرار دارند توسط دو منبع با فرکانس‌های «مختلف» تحریک

شود. بعنوان مثال، میتوان سوردی را در نظر گرفت که یک تقویت کننده صوتی^(۱) تک‌نقطه حاصل از یک فلوت را تقویت میکند. سینوسی‌ها، نت اصلی و هارمونیکهای فلوت میباشند.

برای سهولت در انجام تجزیه و تحلیل، مدار RLC سری شکل (۳-۲) را در نظر میگیریم. معادله دیفرانسیل این مدار چنین است:

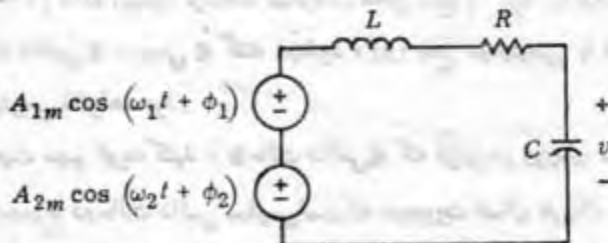
(۳-۱۴)

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

که ولتاژهای ورودی به ترتیب دارای دامنه‌های A_{1m} و A_{2m} ، فرکانس‌های ω_1 و ω_2 و فازهای Φ_1 و Φ_2 میباشند. جواب این معادله بصورت $v_p + v_h$ میباشد که v_h جواب معادله همگن است. برای بدست آوردن یک جواب خاص راحت v_p ، مشاهده میشود که اگر $v_{p1} = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$ وقتی که سینوسی $v_{p2} = A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$ و اگر v_{p2} جواب متناظر برای وقتی که سینوسی $v_p = v_{p1} + v_{p2}$ باشد، آنگاه $v_p = v_{p1} + v_{p2}$ است. درحقیقت طبق تعریف v_{p1} داریم:

$$LC \frac{d^2 v_{p1}}{dt^2} + RC \frac{dv_{p1}}{dt} + v_{p1} = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$$

و برطبق تعریف v_{p2} داریم:



شکل ۳-۳- مدار RLC سری که با دو منبع ولتاژ سینوسی تحریک میشود

$$LC \frac{d^2 v_{p2}}{dt^2} + RC \frac{dv_{p2}}{dt} + v_{p2} = A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

و با جمع کردن این دو معادله خواهیم داشت :

$$LC \frac{d^2}{dt^2} (v_{p1} + v_{p2}) + RC \frac{d}{dt} (v_{p1} + v_{p2}) + (v_{p1} + v_{p2}) \\ = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

که از آن نتیجه میگیریم $v_{p1} + v_{p2}$ جواب خاص معادله (۱۴-۳) میباشد. با بکار بردن نتایج تجزیه و تحلیل فازوری می‌بینیم که :

$$(۱۵-۳) \quad v_p(t) = V_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1 + \theta_1) + V_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2 + \theta_2)$$

که در آن :

$$V_{1m} e^{j(\theta_1 + \Phi_1)} \triangleq \frac{A_{1m} e^{j\Phi_1}}{1 - \omega_1^2 LC + j\omega_1 RC}$$

$$V_{2m} e^{j(\theta_2 + \Phi_2)} \triangleq \frac{A_{2m} e^{j\Phi_2}}{1 - \omega_2^2 LC + j\omega_2 RC}$$

توجه کنید که در مخرج‌های این دو عبارت بترتیب فرکانس‌های ω_1 و ω_2 را بکار بردیم. ما بایستی فرکانس ورودی، سینوسی مناسب را بکار ببریم. مشاهده این نکته بسیار مهم است که شرایط اولیه هرچه باشند وقتی $t \rightarrow \infty$ ، ولتاژ v بطور دلخواه به مقدار v_p که با معادله (۱۵-۳) داده میشود نزدیک میگردد. شکل موج $v_p(\cdot)$ را «حالت دائمی» می‌نامند و حالت دائمی «سینوسی» گفته نمیشود، زیرا جمع دو سینوسی با فرکانس‌های مختلف دیگر سینوسی نخواهد بود.

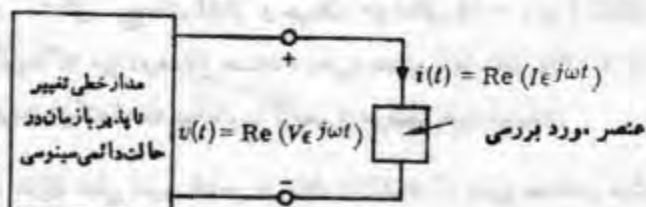
باین واقعیت مهم توجه کنید، «حالت دائمی» که از این دو ورودی سینوسی نتیجه میشود مساوی مجموع دو حالت دائمی سینوسی است که در صورت اعمال هریک از دو سینوسی ورودی بطور جداگانه روی مدار بدست می‌آید. اگرچه این نتیجه فقط برای مدار RLC شکلی (۳-۳) اثبات گردید، ولی مشاهده اینکه این روش استدلال میتواند بهر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان اعمال شود کار مشکلی نیست.

۴ مفهوم‌های امپدانس و ادمیتانس

در دو بخش گذشته نشان دادیم که پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان به‌سبب استفاده از نمایش فازوری یک سینوسی بدست آورد. همچنین آموختیم که در تعیین پاسخ حالت دائمی سینوسی، بجای حل یک معادله دیفرانسیل، تنها لازم است که یک معادله جبری را حل کنیم. بجای جمع، تفریق یا مشتق‌گیری سینوسی‌ها، میتوان اعداد مختلط نمایش‌دهنده آنها را جمع و یا تفریق نمود. در این بخش خواص دیگری از نمایش فازوری سینوسی‌ها را بررسی کرده و مفهوم‌های مهم «امپدانس»^(۱) و «ادمیتانس»^(۲) را بنیان‌گذاری خواهیم کرد. همچنین خواهیم دید که وقتی تنها پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را میخواهیم بدانیم، میتوان از نوشتن معادلات دیفرانسیل صرف‌نظر نمود و بجای آن معادلات جبری خطی لازم را مستقیماً از یک شبکه برحسب فازورهای که نمایشگر ورودی، خروجی و سایر متغیرهای شبکه میباشند بدست آورد.

۱-۴ روابط فازوری برای اجزاء مدار

توصیف ولتاژ- جریان اجزاء مدارهای ساده در فصل دوم به تفصیل مطالعه شد. برای اجزاء خطی «تغییرناپذیر با زمان» مدار، اگر تنها توجه ما روی پاسخ حالت دائمی سینوسی باشد، میتوان با استفاده از نمایش فازوری ولتاژ و جریان، آنرا توصیف نمود. در این زیربخش توصیف سه جزء اصلی مدار یعنی مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها را بدست خواهیم آورد. در هر حالت فرض میکنیم که جزء مورد بررسی به یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، چنانکه در شکل (۱-۴) نشان داده شده است متصل باشد و مدار در حالت دائمی سینوسی



شکل ۱-۴ = یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی

جزء مورد بررسی را تحریک میکند

با فرکانس زاویه‌ای ω قرار گرفته باشد. گیریم ولتاژ شاخه و جریان شاخه جزء موردنظر در حالت دائمی سینوسی چنین باشند:

$$(۱-۴) \quad v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) = |V| \cos(\omega t + \angle V)$$

و:

$$(۲-۴) \quad i(t) = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t}) = |I| \cos(\omega t + \angle I)$$

میخواهیم رابطه میان فازور ولتاژ V و فازور جریان I را برای هریک از سه جزء بدست آوریم:

«مقاومت» یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان، با مقاومت R و بارسانایی $G = \frac{1}{R}$

چنین مشخص میشود:

$$(۳-۴) \quad v(t) = Ri(t) \quad i(t) = Gv(t)$$

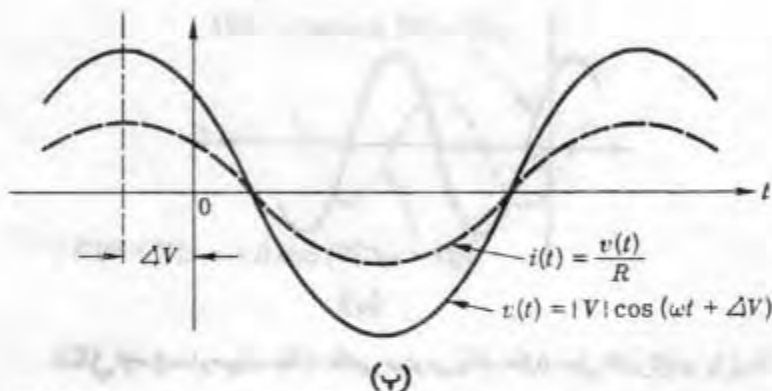
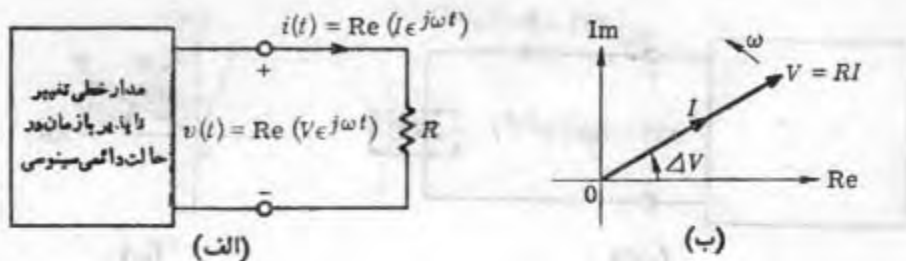
برای بدست آوردن رابطه میان فازور ولتاژ و فازور جریان، معادلات (۱-۴) و (۲-۴) را در معادله (۳-۴) جایگزین میکنیم و با استفاده از لم ۳ بخش ۲ بدست میآوریم:

$$(۴-۴) \quad V = RI \quad I = GV$$

اگر چه مقاومت و رسانایی یک مقاومت همیشه اعداد حقیقی هستند، ولی فازور ولتاژ V و فازور جریان I معمولاً اعداد مختلط میباشند. رسم فازور ولتاژ و فازور جریان در صفحه مختلط مطابق شکل نشان داده شده در (۲-۴ ب) آسوزنده است. چون R یک عدد حقیقی است اعداد مختلط V و I هم امتداد^(۱) بوده و بایستی دارای یک زاویه باشند، یعنی $\angle I = \angle V$. شکل موج‌های ولتاژ و جریان در شکل (۲-۴ پ) نشان داده شده‌اند. اصطلاحاً گویند که این دو هم‌فاز هستند، یعنی، منحنی آنها محور زمان را در یک لحظه قطع کرده و هر دو در یک لحظه به مقدار ماکزیمم و منی‌نیم خود میرسند.

«خازن» یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت C چنین مشخص میشود:

$$(۵-۴) \quad i = C \frac{dv}{dt}$$

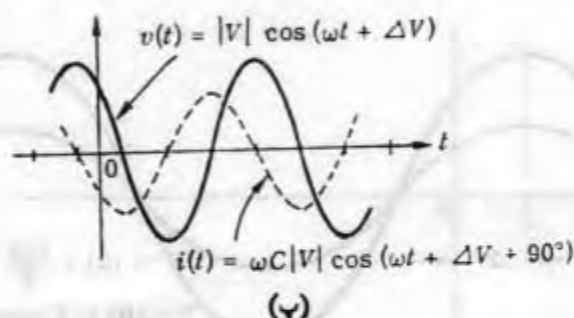
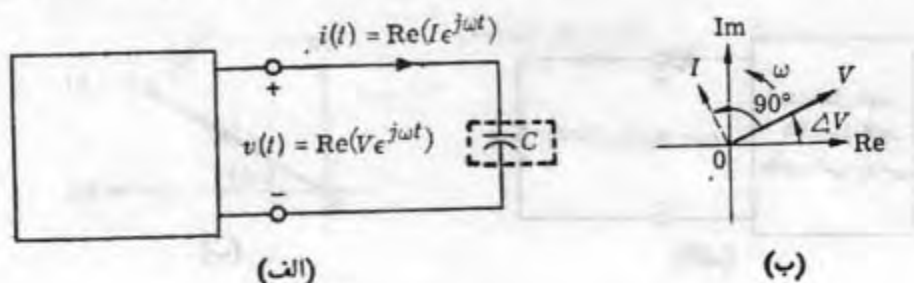


شکل ۴-۲- توصیف حالت دائمی سینوسی یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان

با استفاده از نمایش فازوری i و v در معادلات (۴-۱) و (۴-۲) و جایگزین کردن آنها در (۴-۵)، بدست می‌آوریم:

$$(4-6) \quad I = j\omega CV \quad \text{یا} \quad V = \frac{1}{j\omega C} I$$

در بدست آوردن (۴-۶)، از لم ۲ بخش ۲ (یعنی اعمال $\frac{d}{dt}$ به $Ve^{j\omega t}$ ، معادل ضرب $Ve^{j\omega t}$ در $j\omega$ می‌باشد) استفاده شده است. بعلاوه وجود ضریب $j\omega$ در معادله (۴-۶)، فازور جریان I و فازور ولتاژ V وقتی در صفحه مختلط رسم شوند مطابق شکل (۴-۳ ب) دارای 90° اختلاف فاز خواهند بود. فازور جریان از فازور ولتاژ «جلو»^(۱) می‌افتد زیرا $I = j\omega CV$ و $I = \angle V + 90^\circ$ است. در شکل (۴-۳ ب)، شکل موج‌های ولتاژ و جریان رسم شده‌اند و شکل موج جریان به‌عنوان یک چهارم سیکل بر فازور ولتاژ پیشی دارد.



شکل ۳-۴ - توصیف حالت دائمی سینوسی یکک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان

بایستی خاطرنشان کرد که برخلاف مورد مقاومت، رابطه میان فازور جریان و فازور ولتاژ و لتاژ در اینجا به فرکانس زاویه‌ای ω بستگی دارد.

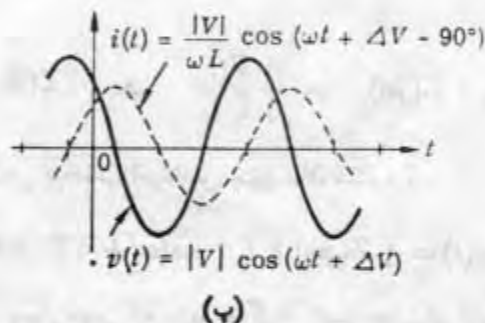
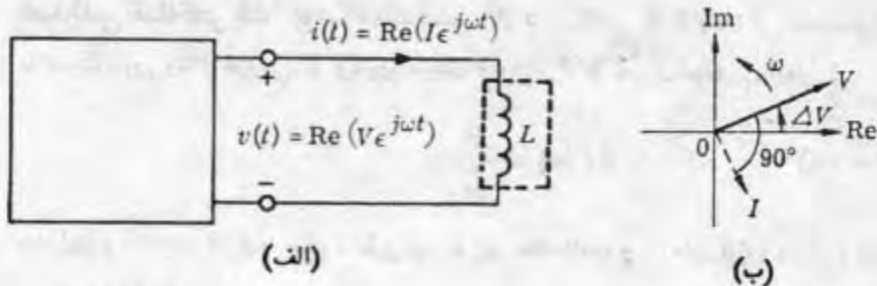
«سلف» یکک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس L چنین مشخص میشود:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (۷-۴)$$

مثل مورد خازن، روابط زیر را میان فازور ولتاژ و فازور جریان بدست میآوریم (برای یکک سلف).

$$V = j\omega LI \quad I = \frac{1}{j\omega L} V \quad (۸-۴)$$

در این مورد، فازور جریان از فازور ولتاژ بمقدار ۹۰° «عقب»^(۱) میافتد، که معنی آن اینست که شکل موج جریان بمیزان یک چهارم سیکل از شکل موج ولتاژ عقب‌تر است. این فازورها



شکل ۴-۴ - توصیف حالت دائمی سینوسی برای یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان

در شکل (۴-۵ ب و پ) تشریح شده‌اند. در اینجا نیز مثل مورد خازن، رابطه میان فازورهای جریان و ولتاژ به فرکانس بستگی دارد.

۴-۲- تعریف امپدانس و ادمیتانس

بحث روابط فازوری برای اجزاء مدار را میتوان برای شبکه‌های یک قطبی کلی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان، تعمیم داد. مدار شکل (۴-۵ الف) را در نظر بگیرید که در آن شبکه یک قطبی N از به هم پیوستن دلخواه اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده است. ورودی یک منبع جریان سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. بنابراین:

$$(۴-۹) \quad i_s(t) = \text{Re}(I_s e^{j\omega t}) = |I_s| \cos(\omega t + \angle I_s)$$

گیریم پاسخ ولتاژ حالت دائمی سینوسی بصورت زیر باشد.

$$(۴-۱۰) \quad v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t}) = |V| \cos(\omega t + \angle V)$$

امپدانس نقطه تحریک^(۱) «شبکه یک قطبی N در فرکانس ω یا بسادگی امپدانس را ، با نسبت فازور ولتاژ خروجی V بر فازور جریان ورودی I_s » تعریف میکنیم ، یعنی :

$$(4-11) \quad Z(j\omega) \triangleq \frac{V}{I_s}$$

بنابراین ، اندازه و فاز امپدانس ، طبق روابط زیر به اندازه‌ها و فازهای فازور ولتاژ و فازور جریان ارتباط دارد .

$$(4-12) \quad |Z(j\omega)| = \frac{|V|}{|I_s|} \quad \text{و} \quad \angle Z(j\omega) = \angle V - \angle I_s$$

شکل موج ولتاژ خروجی بر حسب امپدانس چنین بیان میشود :

$$(4-13) \quad v(t) = |Z(j\omega)| |I_s| \cos(\omega t + \angle Z(j\omega) + \angle I_s)$$

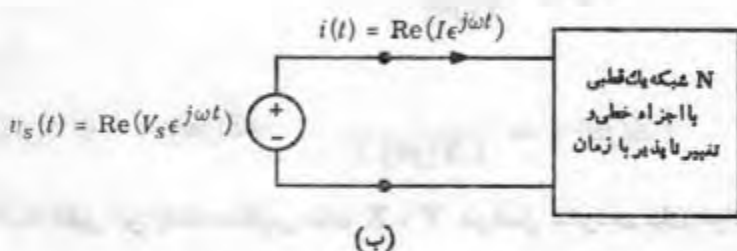
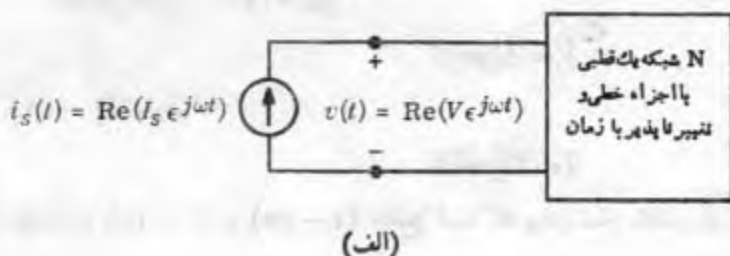
این معادله به نتایج بسیار مهمی که پایه هرگونه تعبیر محاسبات امپدانس میباشد منجر میگردد . بنابراین :

«اگر شبکه یک قطبی N دارای امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ بوده و جریان ورودی آن $I_s \cos(\omega t + \angle I_s)$ باشد . آنگاه در حالت دائمی سینوسی ، ولتاژ قطب آن یک سینوسی با اندازه $|Z(j\omega)| |I_s|$ و فاز $\angle Z(j\omega) + \angle I_s$ خواهد بود .» بعبارت دیگر ، برای بدست آوردن دامنه ولتاژ سینوسی ، دامنه جریان را در اندازه امپدانس (محاسبه شده در فرکانس مناسب) «ضرب» میکنیم و برای بدست آوردن فاز ولتاژ سینوسی ، فاز $\angle Z(j\omega)$ امپدانس را به فاز جریان «میافزائیم» (بازهم محاسبه شده در فرکانس مناسب) . در شکل (۵-۴ ب) ورودی یک منبع ولتاژ سینوسی است :

$$(4-14) \quad v_s(t) = \text{Re}(V_s e^{j\omega t}) = |V_s| \cos(\omega t + \angle V_s)$$

و جریان i پاسخ حالت دائمی سینوسی است که چنین بیان میشود :

$$(4-15) \quad i(t) = \text{Re}(I e^{j\omega t}) = |I| \cos(\omega t + \angle I)$$



شکل ۵-۴ = شبکه یک قطبی N که از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده ،
(الف) به یک منبع جریان سینوسی ، (ب) به یک منبع ولتاژ سینوسی وصل شده است .

ادمیتانس نقطه تحریک شبکه « یک قطبی N دفرکانس ω » (با بسادگی ادمیتانس)
را با نسبت « فازور جریان خروجی I بر فازور ولتاژ ورودی V_s » تعریف میکنیم یعنی :

$$Y(j\omega) \triangleq \frac{I}{V_s} \quad (۴-۱۶)$$

بنابراین ، اندازه و فاز ادمیتانس $Y(j\omega)$ طبق روابط زیر به اندازه ها و فازهای فازور ولتاژ
و فازور جریان ارتباط دارد .

$$|Y(j\omega)| = \frac{|I|}{|V_s|} , \quad \angle Y(j\omega) = \angle I - \angle V_s \quad (۴-۱۷)$$

تبصره ۵- اگر منبع ولتاژ شکل (۴-۵ ب) طوری تنظیم شود که فازور V_s آن مساوی
فازور ولتاژ خروجی V در شکل (۴-۵ الف) باشد . میتوان انتظار داشت که فازور
پاسخ جریان I در شکل (۴-۵ ب) مساوی فازور منبع جریان I_s در شکل (۴-۵ الف)
گردد .

بنابراین از (۱۱-۱) داریم :

$$(11-2) \quad V = Z(j\omega)I$$

از (۱۶-۱) داریم :

$$(11-3) \quad I = Y(j\omega)V$$

از معادلات (۱۸-۱) و (۱۹-۱) واضح است که برای تمام مقادیر ω :

$$(11-4) \quad Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)}$$

و :

$$(11-5) \quad |Z(j\omega)| = \frac{1}{|Y(j\omega)|} \quad \angle Z(j\omega) = -\angle Y(j\omega)$$

اثبات دقیق این رابطه معکوس میان Z و Y در فصل شانزدهم بیان خواهد شد.

تمرین - قاعده‌ای را که اندازه و فاز جریان را برحسب اندازه و فاز ولتاژ و $Y(j\omega)$ بدست می‌دهد در یک عبارت جمله‌ای بیان کنید.

از تعاریف گفته شده در مورد ایدئانس و ادمیتانس ، سرعت می‌توان ایدئانس‌ها و ادمیتانس‌های اجزاء R و L و C را بدست آورد :

فرکانس زاویه‌ای ω	Z (ایدئانس)	Y (ادمیتانس)
مقاومت با مقاربت R	R	$G = \frac{1}{R}$
عازن با ظرفیت C	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
سلف با اندوکتانس L	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

۵- تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای ساده

قوانین کیرشف بیان می‌دارند که در هر لحظه از زمان ، جمع جبری ولتاژهای شاخه‌های معینی و یا جمع جبری جریانهای شاخه‌های معینی صفر می‌باشند. اگر تنها حالت دائمی سینوسی مورد توجه بوده و اگر تنها لازم باشد که با شکل موجهای سینوسی با فرکانس یکسان

مواجه شویم، میتوان بجای اینکه معادلات را برحسب خود سینوسی‌ها بنویسیم، آنها را برحسب فازورها بیان کنیم. بنابراین «در حالت دائمی سینوسی، معادلات کیرشلف را میتوان مستقیماً برحسب فازورهای ولتاژ و فازورهای جریان نوشت». بعنوان مثال گیریم معادله یک مش چنین نوشته شود:

$$v_1(t) + v_r(t) + v_p(t) = 0$$

فرض کنید که هر یک از ولتاژها یک سینوسی با فرکانس «یکسان» ω باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} V_{1m} \cos(\omega t + \Phi_1) + V_{rm} \cos(\omega t + \Phi_r) + V_{pm} \cos(\omega t + \Phi_p) \\ = \operatorname{Re}(V_1 e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(V_r e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(V_p e^{j\omega t}) \\ = \operatorname{Re}[(V_1 + V_r + V_p) e^{j\omega t}] = 0 \end{aligned}$$

از لم ۲ بخش ۲ میتوان بلافاصله یک معادله هم ارز برحسب فازورهای ولتاژهای V_1 ، V_r و V_p نوشت. بنابراین:

$$V_1 + V_r + V_p = 0$$

البته، با دانستن فازور و فرکانس ω ، همیشه میتوان توابع سینوسی زمانی را بدست آورد. بعنوان مثال، اگر فازور ولتاژ در فرکانس زاویه ω توسط V داده شده باشد، تابع سینوسی بسادگی چنین خواهد بود،

$$v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) = V_m \cos(\omega t + \Phi)$$

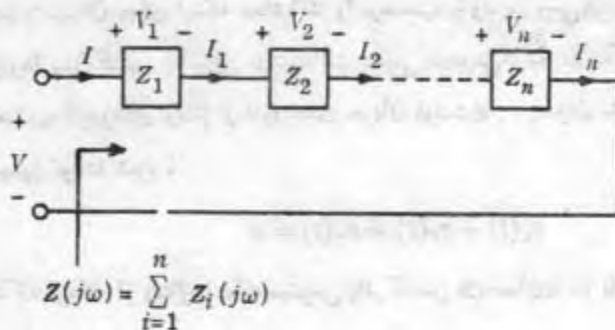
که در آن:

$$V \triangleq V_m e^{j\Phi}$$

بطریق مشابه، میتوان معادلات گره را برحسب فازورهای جریان نوشت.

۱-۵- بهم پیوستنهای سری - موازی

در ابتدا، اتصالات سری و اتصالات موازی را در نظر میگیریم. در شکل (۱-۵) اجزاء مدار که بطور سری بهم وصل شده‌اند دیده میشود. در حالت دائمی سینوسی در فرکانس



شکل ۱-۵ - امپدانس‌های سری

داده شده ω ، هر جزء بایک امپدانس مشخص می‌شود. با نوشتن یک KCL در هر گره بلافاصله مشاهده می‌کنیم که جریانها برای تمام اجزاء یکسان هستند. برحسب فازورها داریم:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$$

با استفاده از KVL و با نمایش فازوری ولتاژها، داریم:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

چون:

$$V_i = Z_i I_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

داریم:

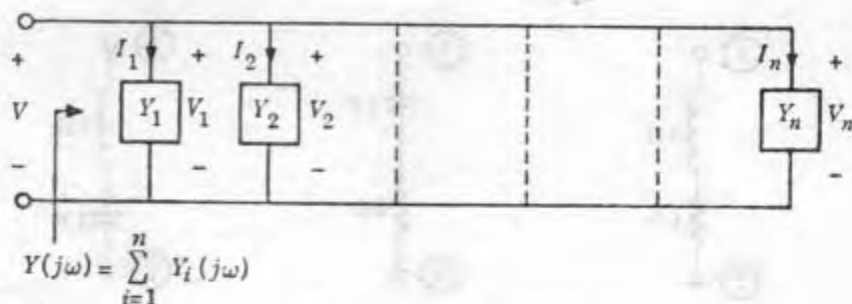
$$Z(j\omega) = \sum_{i=1}^n Z_i(j\omega)$$

که در آن $Z = \frac{V}{I}$ امپدانس شبکه یک قطبی نشان داده شده در شکل (۱-۵) می‌باشد.

بطریق مشابه، در شکل (۲-۵) اجزاء ساده مدار که بطور موازی بهم وصل شده‌اند دیده می‌شود. هر جزء توسط امپدانس و یا ادیتانس خود مشخص می‌شود. با استفاده از KVL داریم:

$$V_1 = V_2 = \dots = V_n = V$$

بنابراین ولتاژهای تمام شاخه‌ها یکسان می‌باشند. با استفاده از KCL داریم:



شکل ۲-۵ = ادیتانس‌های موازی

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

چون :

$$I_i = Y_i V_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

داریم :

$$Y(j\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(j\omega)$$

که در آن $Y = \frac{I}{V}$ ادیتانس شبکه یک قطبی نشان داده شده در شکل (۲-۵) می باشد.

تمرین ۱ = امپدانس های نقطه تحریک را بصورت توابعی از ω ، برای شبکه های یک قطبی نشان داده شده در شکل (۲-۵) تعیین کنید.

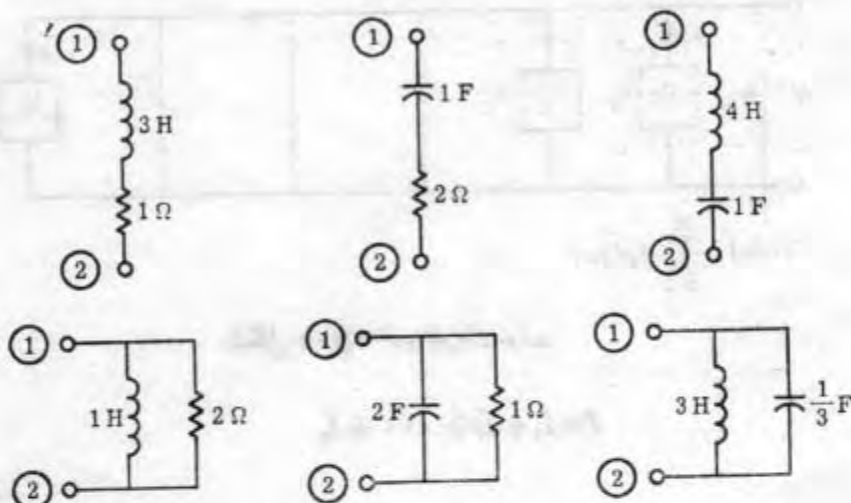
تمرین ۲ = برای هر یک از امپدانس ها ، اندازه و فاز را بر حسب ω رسم کنید.

تمرین ۳ = فرض اینکه یک منبع جریان i_s به هر یک از شبکه های یک قطبی وصل شود ، پاسخ های ولتاژ حالت دائمی (در دوسرگروه های ❶ و ❷) را برای i_s های زیر تعیین کنید :

الف - $i_s = \cos t$

ب - $i_s = \cos 2t$

واضح است که مدارهای پیچیده تر را میتوان با ترکیب اجزاء بصورت سری و موازی



شکل ۵-۳- امپدانس‌های نقطه تحریک برای شبکه‌های یک قطبی که بایستی تعیین شوند

تجزیه و تحلیل نمود. بعنوان مثال، در مدار شکل (۴-۵) که معمولاً «مدار تردبانی»^(۱) گفته میشود، امپدانس نقطه تحریک را میتوان چنین بیان کرد:

$$(۵-۱) \quad Z = Z_1 + \frac{1}{Y_r + \frac{1}{Z_r + \frac{1}{Y_\xi + \frac{1}{Z_o}}}}$$

که میتوان آنرا مجدداً چنین نوشت:

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + \frac{1}{Y_r + \frac{1}{Z_r + \frac{Z_o}{1 + Y_\xi Z_o}}} \\ &= Z_1 + \frac{1}{Y_r + \frac{1 + Y_\xi Z_o}{Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)}} \end{aligned}$$

$$= Z_1 + \frac{Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)}{1 + Y_\xi Z_o + Y_r[Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)]}$$

$$= \frac{Z_1[1 + Y_\xi Z_o + Y_r Z_o + Y_r Z_r(1 + Y_\xi Z_o)] + Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)}{1 + Y_\xi Z_o + Y_r[Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)]}$$

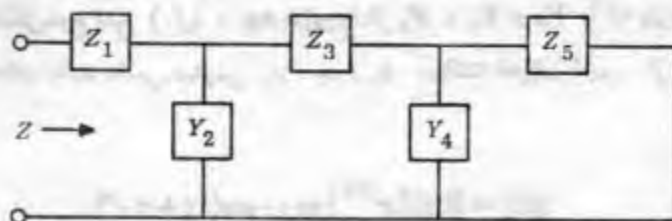
معادله (۱-۵) «گسترش کسره‌های متوالی»^(۱) نامیده می‌شود. این گسترش در ترکیب^(۲) مدارها مفید می‌باشد.

تمرین - امپدانس‌های نقطه تحریک برای شبکه‌های یک قطبی نشان داده شده در شکل (۵-۵) را تعیین کنید.

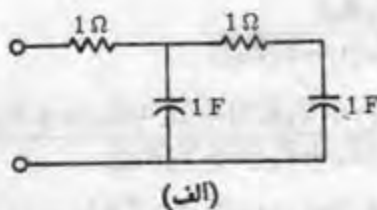
از مثالهای فوق مشاهده می‌شود که در تجزیه و تحلیل شبکه‌هایی که از اتصال سری و موازی اجزاء مدار درست شده‌اند تنها لازم است که اجزاء سری را با جمع امپدانس‌های تمام شاخه‌هایی که بطور سری هستند ترکیب نمود و اجزاء موازی را با جمع ادmittانس‌های تمام شاخه‌هایی که بطور موازی هستند ترکیب کرد. چون امپدانس نقطه تحریک بسادگی معکوس ادmittانس نقطه تحریک می‌باشد، بنابراین در انتخاب امپدانس و یا ادmittانس، برحسب اینکه در یک مورد خاص کدامیک مناسبتر هستند، میتوان انعطاف‌پذیر بود. در ترکیب موازی شکل (۲-۵) ادmittانس را انتخاب می‌کنیم و در شبکه نردبانی نشان داده شده در شکل (۴-۵) متناوباً امپدانس و ادmittانس را بکار می‌بریم.

۵-۲- تجزیه و تحلیل گره و مش در حالت دائمی سینوسی

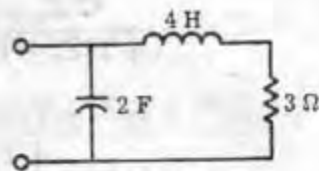
برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان که بشکل اتصال سری - موازی اجزاء مدار نیستند، میتوان از دو روش عمومی تجزیه و تحلیل مدار یعنی تجزیه و تحلیل گره و



شکل ۵-۴ یک شبکه نردبانی ساده



(الف)



(ب)

شکل ۵-۵- امپدانس‌های نقطهٔ تحریک برای شبکه‌های یک قطبی که بایستی تعیین شوند

تجزیه و تحلیل مش استفاده نمود. ابتدا لازم است مجدداً تأکید شود که «تنها تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مورد بررسی ما میباشد». بنابراین میتوان از فازورهای ولتاژها، فازورهای جریانها، امپدانس‌ها و ادیتانس‌ها در نوشتن معادلات KVL و KCL استفاده کرد. نوع معادلات حاصل، معادلات جبری خطی بوده و میتوان آنها را توسط قاعده کراسر حل نمود. برای تشریح روشها دو مثال ذکر میگردد.

مثال ۱- گیریم در مدار شکل (۶-۵) ورودی منبع جریان زیر باشد:

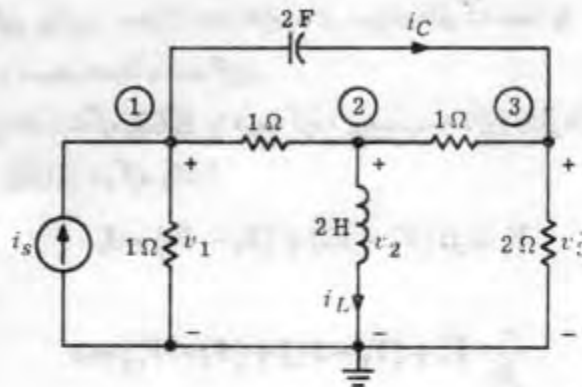
$$i_s(t) = 10 \cos(2t + 30^\circ) \quad (۶-۵)$$

میخواهیم ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_3 را در دو سر مقاومت ۲ اهمی پیدا کنیم. ما از تجزیه و تحلیل گره استفاده خواهیم کرد. گیریم گره مبنا را بصورت نشان داده شده در شکل انتخاب کرده و ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا را v_1 ، v_2 و v_3 بنامیم. چون روی هم رفته چهار گره در مدار وجود دارد، میتوان سه معادله KCL برای آنها نوشت. بنابراین سه مجهول ما را، سه ولتاژ گره نسبت به مبنا تشکیل میدهند که میتوان آنها را از روی سه معادله KCL تعیین کرد. قبل از شروع بنویشتن این معادلات، میخواهیم فازور منبع جریان I_s نمایشگر شکل موج منبع $i_s(0)$ ، و سه فازور ولتاژ V_1 ، V_2 و V_3 را که به ترتیب نشان دهنده ولتاژهای حالت دائمی سینوسی v_1 ، v_2 و v_3 میباشد تعریف کنیم. از (۶-۵) داریم:

$$i_s(t) = \text{Re}(I_s e^{j2t}) = 10 \cos(2t + 30^\circ)$$

و یا:

$$I_s \triangleq 10 e^{j30^\circ} \quad (۶-۶)$$



شکل ۶-۵ - مثال ۱ : تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی
که برپایه تجزیه و تحلیل گره قرار دارد

توجه کنید که فرکانس زاویه ای $\omega = 2$ رادیان برثانیه میباشد. گیریم فازورهای ولتاژها با معادلات زیر تعریف شوند :

$$v_1(t) = \text{Re}(V_1 e^{j2t})$$

$$(۵-۴) \quad v_r(t) = \text{Re}(V_r e^{j2t})$$

$$v_r(t) = \text{Re}(V_r e^{j2t})$$

بیاد آورید که برای بدست آوردن فازور جریان ، فازور ولتاژ را در ادیتمانس آن جزء ضرب میکنیم. بعنوان مثال ، گیریم جریان در سلف i_L بوده که توسط فازور جریان I_L نشان داده میشود. اگر V_r داده شده باشد ، میتوان I_L را چنین بدست آورد :

$$I_L = Y_L V_r = \frac{1}{j\omega L} V_r = \frac{1}{j4} V_r$$

بطریق مشابه ، گیریم جریان خازن i_C بوده که توسط فازور جریان I_C نشان داده میشود. باتوجه باینکه ولتاژ دوسر خازن $v_1 - v_3$ میباشد ، برحسب فازورها بدست میآوریم :

$$I_C = Y_C (V_1 - V_r) = j\omega C (V_1 - V_r) = j4 (V_1 - V_r)$$

با تعقیب این روش، میتوان تمام فازورهای جریان‌های شاخه‌ها را برحسب فازورهای ولتاژهای گره نسبت به مبنا بدست آورد.

سپس معادلات گره KCL را در سه گره، برحسب سه فازور ولتاژهای گره نسبت به مبنا مینویسیم. بنابراین در گره یک:

$$V_1 + j\omega(V_1 - V_r) + (V_1 - V_r) = I_s$$

در گره دو:

$$\frac{1}{j\omega} V_r + (V_r - V_1) + (V_r - V_r) = 0$$

و در گره سه:

$$\frac{1}{\omega} V_r + j\omega(V_r - V_1) + (V_r - V_r) = 0$$

با مرتب کردن مجدد معادلات، بدست می‌آوریم:

$$(2 + j\omega)V_1 - V_r - j\omega V_r = I_s$$

$$-V_1 + (2 + \frac{1}{j\omega})V_r - V_r = 0$$

$$-j\omega V_1 - V_r + (\frac{2}{\omega} + j\omega)V_r = 0$$

این نتایج، دسته‌ای از سه معادله جبری خطی با ضرایب مختلط را تشکیل می‌دهند. فازور ولتاژ مطلوب V_r را میتوان از قاعده کرامر بدست آورد. بنابراین:

$$V_r = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j\omega & -1 & I_s \\ -1 & 2 + \frac{1}{j\omega} & 0 \\ -j\omega & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j\omega & -1 & 0 \\ -1 & 2 + \frac{1}{j\omega} & -j\omega \\ -j\omega & -1 & \frac{2}{\omega} + j\omega \end{vmatrix}} = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega + 2\omega} I_s$$

چون $I_s = 1 \angle 30^\circ$ است :

$$V_s = 6.45 \angle 44^\circ$$

بنابراین ، ولتاژ حالت دائمی سینوسی خروجی چنین است :

$$v_s(t) = 6.45 \cos(2t + 44^\circ)$$

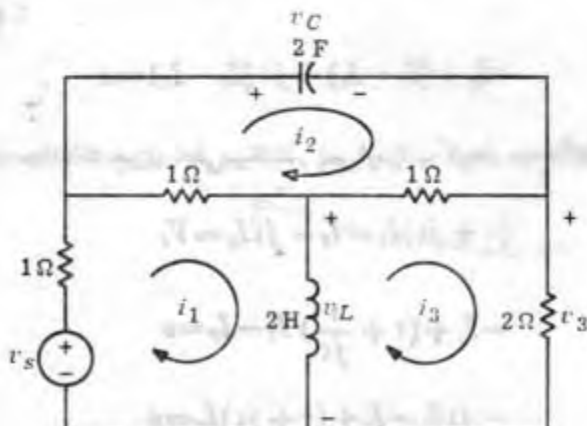
مثال ۲- می‌خواهیم با استفاده از تجزیه و تحلیل مش ، همان مسأله را حل کنیم . ابتدا با استفاده از مدار معادل نرتن ، منبع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم . مدار بدست آمده در شکل (۷-۵) نشان داده شده و منبع ولتاژ چنین است :

$$v_s(t) = 10 (\cos 2t + 30^\circ)$$

و بنابراین فازور نشان دهنده v_s چنین است :

$$V_s = 10 \angle 30^\circ$$

در تجزیه و تحلیل مش ، جریانهای مشها را بعنوان متغیرهای شبکه بکار می‌بریم . این جریانها i_1 ، i_2 و i_3 بصورت نشان داده شده در شکل (۷-۵) میباشند . نمایش های فازوری برای i_1 ، i_2 و i_3 بصورت زیر تعریف میشوند .



شکل ۷-۵- مثال ۲ : همان مدار شکل (۶-۵) با این تفاوت که بمنظور سهولت در تجزیه و تحلیل مش جریان با منبع ولتاژ معادل تعویض شده است .

$$i_1(t) = \operatorname{Re}(I_1 e^{j\omega t})$$

$$i_r(t) = \operatorname{Re}(I_r e^{j\omega t})$$

$$i_p(t) = \operatorname{Re}(I_p e^{j\omega t})$$

معادلات مشها را با استفاده از KVL برحسب فازورهای I_1 ، I_r ، I_p و V_s خواهیم نوشت. ابتدا لازم است که تمام فازورهای ولتاژهای شاخه‌ها را برحسب فازورهای جریانهای مشها I_1 ، I_r و I_p بیان کنیم. برای اینکار، فازورهای جریانهای شاخه‌ها را درامپدانس شاخه‌ها ضرب می‌کنیم. بعنوان مثال، فازور ولتاژ V_C برای خازن مساوی $\frac{1}{j\omega} I_r$ میباشد. بهمین ترتیب فازور ولتاژ V_L برای سلف مساوی $j\omega(I_1 - I_r)$ است. سپس معادلات KVL برحسب فازورهای جریانهای مشها نوشته میشوند. بنابراین برای مش ۱:

$$I_1 + (I_1 - I_r) + j\omega(I_1 - I_r) = V_s$$

برای مش ۲:

$$\frac{1}{j\omega} I_r + (I_r - I_r) + (I_r - I_1) = 0$$

و برای مش ۳:

$$2I_r + (I_r - I_r) + j\omega(I_r - I_1) = 0$$

این سه معادله، معادلات جبری خطی میباشد. پس از مرتب کردن مجدد آنها خواهیم داشت:

$$(2 + j\omega)I_1 - I_r - j\omega I_r = V_s$$

$$-I_1 + (2 + \frac{1}{j\omega})I_r - I_r = 0$$

$$-j\omega I_1 - I_r + (2 + j\omega)I_r = 0$$

با استفاده از قاعده کرامر، I_p را پیدا می‌کنیم. بنابراین:

$$I_r = \frac{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & V_s \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & 0 \\ -j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & -1 \\ -j4 & -1 & 2+j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & 0 \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & -1 \\ -j4 & -1 & 2+j4 \end{vmatrix}} = \frac{2+j8}{12+j22} V_s$$

چون $V_s = 10 \angle 20^\circ$ و $V_r = 2I_r$ داریم:

$$V_r = 6.4 \angle 44^\circ$$

یا:

$$v_r(t) = 6.4 \cos(2t + 44^\circ)$$

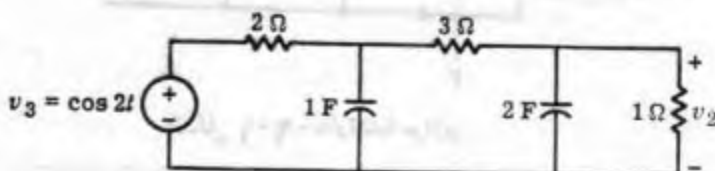
این جواب البته با آنچه توسط تجزیه و تحلیل گره بدست آمد مطابقت دارد.

تمرین ۱- معادلات حلقه برای مدار نردبانی نشان داده شده در شکل (۸-۵) را بنویسید. فرض میشود که مدار در حالت دائمی سینوسی قرار دارد.

تمرین ۲- معادلات را برای ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_r در دوسرمقاومت ۱ اهمی حل کنید.

تمرین ۳- منبع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کرده و معادلات گره را برحسب فازورها بنویسید.

تمرین ۴- معادلات را برای ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_r برپایه تجزیه و تحلیل گره حل کنید.



شکل ۸-۵- یک مدار نردبانی در حالت دائمی سینوسی

۶- مدارهای تشدید

برای تشریح بیشتر تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی و مفاهیم فازور، امپدانس، ادمیتانس و یک مفهوم جدید که «تابع شبکه»^(۱) گفته میشود از یک مدار تشدید استفاده خواهیم کرد. برای نشان دادن بسیاری از خواص مدارهای تشدید، نمایش‌های ترسیمی گوناگونی ارائه خواهد شد. این روش‌های ترسیمی برای تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای پیچیده‌تر مفید خواهند بود.

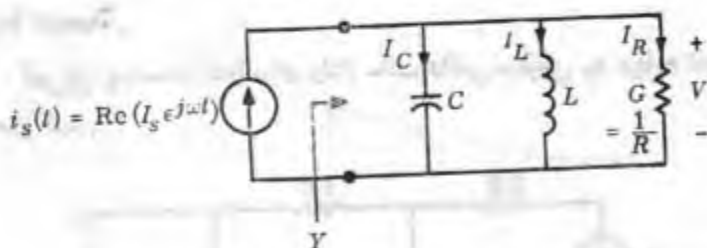
در عمل، دو نوع مدار تشدید، یعنی مدار تشدید سری و مدار تشدید موازی حایز اهمیت می‌باشند. ما مدار تشدید RLC موازی شکل (۱-۶) را تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. مدار تشدید سری دوگان مدار تشدید موازی است و چون مفهوم دوگانی را مختصراً بحث کرده‌ایم از تشریح جزئیات مدارهای تشدید سری صرف‌نظر می‌گردد. معه‌ذا، بمنظور مراجعه، نتایج برای هر دو نوع مدار در جدول (۱-۷) در آخر این بخش خلاصه شده‌است.

۶-۱- امپدانس، ادمیتانس و فازورها

مدار تشدید شکل (۱-۶) را که توسط یک منبع جریان سینوسی زیر تحریک میشود در نظر بگیرید:

$$(۱-۶) \quad i_s(t) = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t}) = |I_s| \cos(\omega t + \angle I_s)$$

ادمیتانس شبکه یک قطبی در فرکانس زاویه‌ای ω چنین است:



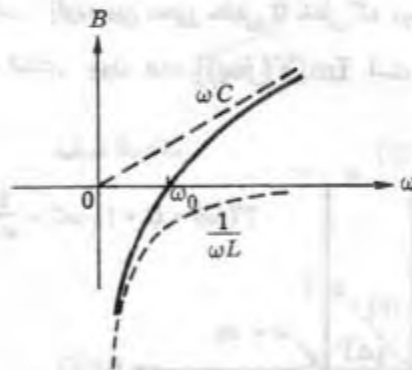
شکل ۶-۱- مدار تشدید موازی

$$\begin{aligned}
 Y(j\omega) &= G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\
 &= G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)
 \end{aligned}$$

بنابراین، جزء حقیقی $Y(j\omega)$ یک ثابت و جزء انکاری آن تابعی از ω می باشد. جزء انکاری یک ادیتانس، سوسپتانس^(۱) خوانده شده و با B مشخص می گردد. در نتیجه:

$$B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad (۱-۳)$$

سوسپتانس تابعی از ω بوده و در شکل (۱-۲) برحسب ω رسم شده است. در فرکانس $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سوسپتانس صفر بوده و گفته می شود که مدار در حالت تشدید است. فرکانس f_0 را فرکانس تشدید می نامند. اهمیت کلمه « تشدید » بعداً در این بخش بحث خواهد شد.



شکل ۱-۲- منحنی سوسپتانس یک مدار تشدید موازی، $B(\omega)$ برحسب ω .

توجه کنید که در فرکانس زاویه ای تشدید $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ رادیان بر ثانیه

و $B(\omega_0) = 0$ می باشد.

«صفحه‌های امیدانس و ادمیتانس» معادله (۲-۶) نشان می‌دهد که ادمیتانس، تابع فرکانس زاویه‌ای ω می‌باشد. با جدا کردن معادله (۲-۶) باجزاء حقیقی و انگاری بدست می‌آوریم:

$$\text{Re}[Y(j\omega)] = G \quad (۲-۴ \text{ الف})$$

$$\text{Im}[Y(j\omega)] = B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad (۲-۴ \text{ ب})$$

رفتار مشخصه ادمیتانس $Y(j\omega)$ را میتوان بصورت ترمیمی توصیف کرد. برای هر ω معین، میتوان $Y(j\omega)$ را بصورت یک نقطه در صفحه مختلط که در این مورد صفحه ادمیتانس نامیده میشود رسم نمود. وقتی ω تغییر میکند، نقطه $Y(j\omega)$ تغییر کرده و معادلات (۲-۴ الف) و (۲-۴ ب) معادلات پارامتری منحنی طی شده توسط $Y(j\omega)$ را تشکیل میدهند (شکل ۲-۶ را ببینید). این منحنی مکان Y نامیده میشود. چون در حالت مورد بررسی ما طول G ثابت است، مکان خط مستقیمی بموازات محورها نگاری بوده که محور حقیقی را در G قطع میکند. فاصله بین $Y(j\omega)$ تا مبدأ مساوی اندازه $|Y(j\omega)|$ میباشد. زاویه بین محور حقیقی تا خطی که مبدأ را به $Y(j\omega)$ وصل میکند، فاز $\angle Y(j\omega)$ است. چون $\text{Im}[Y(j\omega_0)] = 0$ است، پس $Y(j\omega_0) = G$



شکل ۲-۶ مکان Y در صفحه ادمیتانس

میباشد. بنابراین در حالت تشدید $(\omega = \omega_0)$ ، ادیمیتانس «می نیمم» بوده و فاز آن «صفر» است. تذکر این نکته جالب توجه است که ادیمیتانس مدار تشدید موازی در حالت «تشدید» مساوی ادیمیتانس مقاومت تنها میباشد. یعنی ترکیب خازن و سلف مثل یک مدار باز رفتار میکند.

تمرین - یک مدار تشدید موازی با $L = 1$ هانری، $C = 1$ فاراد و $R = 100$ اهم را در نظر بگیرید. مکان Y را رسم کنید. بویژه نقاط نظیر:

$$\omega = 0, 0.3, 0.995, 1.00, 1.005, 1.3, \infty$$

رادیان بر ثانیه را مشخص نمایید.

امپدانس مدار تشدید موازی چنین است:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + jB(\omega)} = \frac{1}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \\ (1-5) \quad &= \frac{G}{G^2 + B^2(\omega)} + j \frac{-B(\omega)}{G^2 + B^2(\omega)} \end{aligned}$$

بطریق مشابه، میتوان امپدانس را در «صفحه امپدانس» مختلط رسم کرد. از معادله (1-5) داریم:

$$(1-6 \text{ الف}) \quad \operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \frac{G}{G^2 + B^2(\omega)}$$

و:

$$(1-6 \text{ ب}) \quad \operatorname{Im}[Z(j\omega)] \triangleq X(\omega) = \frac{-B(\omega)}{G^2 + B^2(\omega)}$$

جزء انگاری یک امپدانس، را **گتانس**^(۱) نامیده شده و معمولاً با $X(\omega)$ مشخص میشود. معادلات (1-6 الف) و (1-6 ب) را میتوان بعنوان معادلات پاراستری یک منحنی در صفحه امپدانس در نظر گرفت. این منحنی مکان Z نامیده میشود.

تمرین ۱- مکان Z را برای مدار RLC موازی با $L = 1$ هانری، $C = 1$ فاراد و $R = 100$ اهم رسم کنید.

تمرین ۲- ثابت کنید که مکان Z در صفحه امپدانس مختلط برای هر مدار RLC

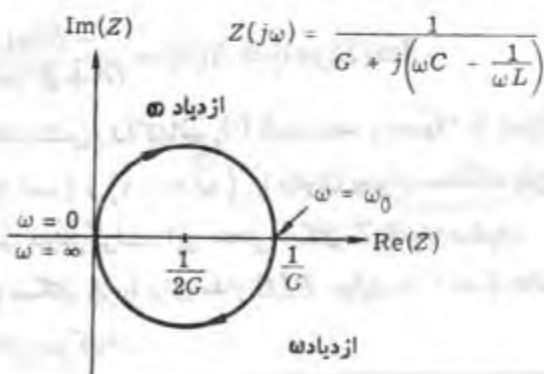
سوازی یک دایره است که مرکز آن در $(\frac{1}{2G}, 0)$ واقع شده و شعاع آن $\frac{1}{2G}$

میباشد، چنانکه در شکل (۶-۴) نشان داده شده است. راهنمایی: معادله دایره چنین است:

$$(\text{Re}(Z) - \frac{1}{2G})^2 + [\text{Im}(Z)]^2 = (\frac{1}{2G})^2 \quad (6-7)$$

اهمیت تشدید با بررسی مکان Y در شکل (۶-۳) و یا مکان Z در شکل (۶-۴) روشن خواهد شد. اندازه امپدانس $|Z(j\omega)|$ بصورت تابعی از ω ، بازه $\omega=0$ از مقدار صفر شروع شده، بصورت یکنوا افزایش یافته و در تشدید ($\omega=\omega_0$) بمقدار «ماکسیمم» میرسد. در حالت تشدید، راکتانس $X(\omega_0)$ صفر بوده و گفته میشود که $Z(j\omega_0)$ مقاومت خالص است. برای $\omega > \omega_0$ ، $|Z(j\omega)|$ بصورت یکنوا کاهش یافته و وقتی $\omega \rightarrow \infty$ ، بسمت صفر میل میکند. از لحاظ فیزیکی در حالت تشدید، تمام جریان منبع جریان از مقاومت گذشته و جمع جریانهای خازن و سلف صفر میگردد. در فرکانسهای پائین ($\omega \ll \omega_0$) قسمت اعظم جریان از درون سلف میگذرد. در فرکانسهای بالا ($\omega \gg \omega_0$) قسمت اعظم جریان از درون خازن میگذرد.

صفحه امپدانس



شکل ۶-۴ مکان Z در صفحه امپدانس

حال فازورهای ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها را در نظر میگیریم. فازور ولتاژ V چنین بیان میشود:

$$V = ZI_s \quad (۶-۸)$$

« دیاگرام فازوری » گیریم فازورهای جریان برای شاخه‌های مقاومت، سلف و خازن برترتیب I_R ، I_L و I_C باشند. آنگاه:

$$I_R = GV \quad I_L = \frac{1}{j\omega L} V \quad I_C = j\omega CV \quad (۶-۹)$$

واضح است که:

$$I_R + I_L + I_C = I_s \quad (۶-۱۰)$$

برای روشن شدن روابط فوق گیریم داشته باشیم:

$$i_s(t) = \cos t = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

یعنی:

$$I_s = 1 e^{j0} \text{ آمپر} \quad \omega = 1 \text{ رادیان بر ثانیه}$$

گیریم مقادیر اجزاء چنین داده شده باشند:

$$R = 1 \text{ اهم} \quad L = \frac{1}{4} \text{ هنری} \quad C = 1 \text{ فاراد}$$

ادمیتانس مدار تشدید (برحسب میو) در فرکانس زاویه‌ای $\omega = 1$ رادیان بر ثانیه چنین است.

$$Y(j1) = 1 + j(1 - \frac{1}{4}) = 1 - j\frac{3}{4} = \sqrt{1.0625} e^{-j71.6^\circ}$$

بنابراین امپدانس (برحسب اهم) چنین است:

$$Z(j1) = \frac{1}{Y(j1)} = \frac{1}{\sqrt{1.0625}} e^{j71.6^\circ}$$

و فازور ولتاژ (برحسب ولت) چنین می‌باشد:

$$V = Z(j1)I_s = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j131.6^\circ}$$

از معادله (۶-۹) با $\omega = 1$ داریم (برحسب آمپر)

$$I_R = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j131.6^\circ} \quad I_L = \frac{4}{\sqrt{10}} e^{-j18.4^\circ} \quad I_C = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j131.6^\circ}$$

فازورهای ولتاژ V و جریانها در شکل (۶-۵) رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که:

$$I_R + I_L + I_C = I_s$$

است.

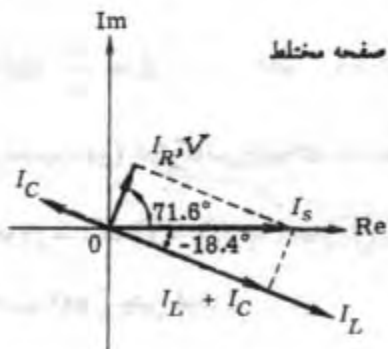
حال فرض کنید در فرکانس تشدید $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$ رادیان بر ثانیه، یک ورودی

سینوسی به مدار اعمال شود. گیریم ورودی چنین باشد:

$$i_s(t) = \cos 2t = \operatorname{Re}(I_s e^{j2t})$$

یعنی:

$$I_s = 1 e^{j0} \quad \text{آمپر} \quad \omega = 2 \quad \text{رادیان بر ثانیه}$$



شکل ۶-۵ = ترسیم فازورهای ولتاژ و جریان در صفحه مختلط
(جریان منبع است I_s)

ورودی دارای فرکانسی مساوی فرکانس تشدید مدار است. دیده میشود که ادمیتانس چنین میباشد:

$$Y(j\omega) = 1 \text{ مهو}$$

بنابراین، فازور ولتاژ چنین است:

$$V = 1 \text{ ولت}$$

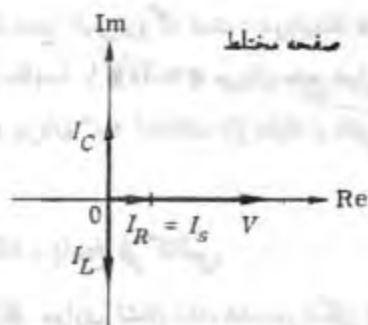
$$I_R = 1 \text{ آمپر} \quad I_L = 2e^{-j90^\circ} \text{ آمپر} \quad I_C = 2e^{j90^\circ} \text{ آمپر}$$

فازورها در شکل (۶-۶) رسم شده‌اند. تذکر این نکته جالب توجه است که اندازه‌های جریانهای شاخه‌ها در سلف و خازن دوبرابراندازه جریان ورودی میباشند. این امر تعجب‌آور نیست زیرا معادله (۶-۱۰) معادله‌ای با اعداد مختلط میباشد و در مورد اخیر I_C و I_L به ترتیب $+90^\circ$ و -90° با I_s اختلاف فاز دارند.

مشاهده اثر مقاومت در رفتار کلی مدار تشدید نیز مطلب قابل توجهی میباشد. بعنوان مثال هرگاه در حالت بالا، بجای مقاومت ۱ اهمی یک مقاومت ۲۰۰ اهمی را قرار دهیم و مقادیر خازن و سلف بدون تغییر بمانند، باز هم فرکانس تشدید ۲ رادیان بر ثانیه بوده و:

$$Y(j\omega) = 4 \times 10^{-3} \text{ مهو} \quad \text{یا} \quad Z(j\omega) = 250 \text{ اهم}$$

بنابراین با همان جریان ورودی، یعنی $I_s = 1$ آمپر، بدست می‌آوریم:



شکل ۶-۶ = ترسیم فازورهای ولتاژ و جریان در حالت تشدید

$$V = 250 \text{ ولت}$$

$$I_C = j500 = 500e^{j90^\circ} \text{ آمپر}$$

$$I_L = -j500 = 500e^{-j90^\circ} \text{ آمپر}$$

$$I_R = 1 \text{ آمپر}$$

این جریانها و ولتاژها را میتوان چنین توجیه کرد: یک جریان بزرگ ۵۰۰ آمپری در مدار LC جاری شده و جریان یک آمپری منبع از مقاومت میگذرد. درحقیقت، نسبت اندازه جریان در سلف (یا خازن) به اندازه جریان منبع در «حالت تشدید» مساوی ضریب کیفیت Q مدار تشدید است. یعنی:

$$\frac{|I_L|}{|I_s|} = \frac{|I_C|}{|I_s|} = Q$$

بخطرمحین پدیده است که هنگام اندازه گیری جریانها و ولتاژهای یک مدار تشدید بایستی دقت نمود. بعنوان مثال دریک مدار تشدید «سری» که دارای ورودی منبع ولتاژ با دامنه فقط چند ولت میباشد، ولتاژ دوسر سلف یا خازن ممکن است دامنه‌ای در حدود چند صد ولت داشته باشد!

تعبیر ۵- در تمام بحث‌های این بخش ما منحصرآ حالت دائمی سینوسی را که در آن تمام ولتاژهای شاخه‌ها و تمام جریانهای شاخه‌ها در فرکانس یکسان بطور سینوسی با زمان تغییر میکنند در نظر گرفتیم. بعنوان مثال، وقتی میگوئیم در حالت تشدید $Q \gg 1$ ، جریان سلف در مقایسه با جریان منبع خیلی بزرگ است، درحقیقت «منظور» اینست که «دامنه» جریان سینوسی سلف در مقایسه با «دامنه» جریان منبع خیلی بزرگ میباشد. درحقیقت، در حالت تشدید، این دو جریان 90° اختلاف فاز دارند و وقتی یکی از آنها ما کسیمیم است، دیگری صفر میباشد.

۶-۲- تابع شبکه، پاسخ فرکانس

باز هم مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۱-۶) مورد نظر ما است. اکنون فرض میکنیم که خروجی واقعی مورد توجه برای مدار تشدید، جریان حالت دائمی

در مقاومت، یعنی $i_R(t) = \text{Re}(I_R e^{j\omega t})$ باشد. در این حالت نیز ورودی همان منبع جریان سینوسی $i_s(t) = \text{Re}(I_s e^{j\omega t})$ است. تابع شبکه «با نسبت فازور خروجی به فازور ورودی» تعریف میشود. گیریم تابع شبکه را با H مشخص کنیم، در این صورت تابع شبکه H که در $j\omega$ حساب شده است چنین میباشد.

$$H(j\omega) = \frac{I_R}{I_s} = \frac{GV}{I_s} = GZ(j\omega) = \frac{1}{1 + jR(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

$$(۶-۱۱) \quad = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

که در آن:

$$(۶-۱۲) \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

توجه کنید که توابع شبکه معمولاً به فرکانس زاویه‌ای ω بستگی دارند و این امر در معادله (۶-۱۱) برای H دیده میشود. اندازه تابع شبکه H چنین است.

$$(۶-۱۳) \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

و فاز آن چنین است:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

یا:

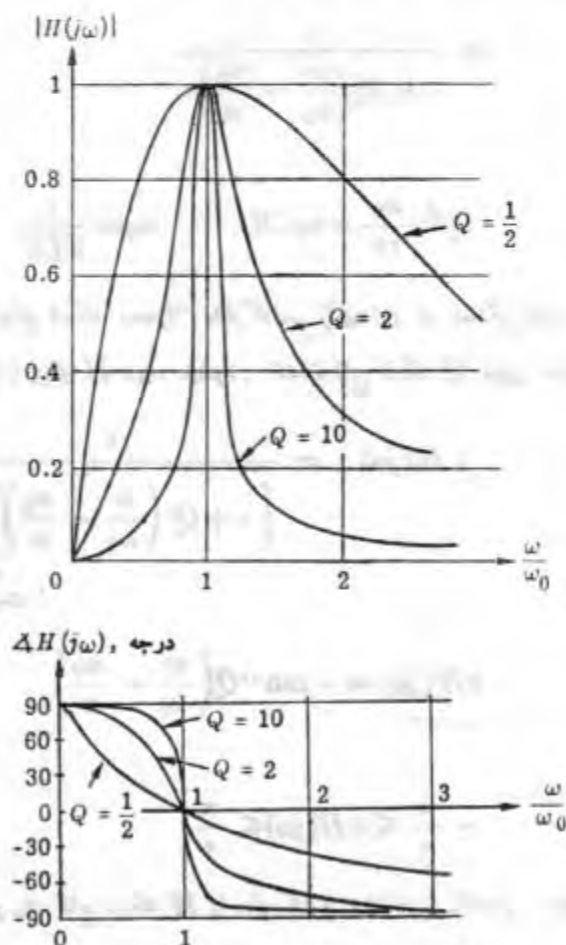
$$(۶-۱۴) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \angle H(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$$

دو پارامتر Q و ω_0 تابع شبکه H را بطور کامل مشخص میکنند. در شکل (۶-۷) اندازه و فاز H را بر حسب $\frac{\omega}{\omega_0}$ درحالی که Q بصورت یک پارامتر است رسم میکنیم.

این دو دسته متغنی‌ها، یعنی اندازه و فاز برحسب ω بسیار مفید می‌باشند چونکه در تمام فرکانس‌ها همه اطلاعات لازم برای هر مدار تشدید را بدست می‌دهند. برای پیدا کردن پاسخ حالت دائمی سینوسی i_R ناشی از ورودی $i_s = \text{Re}(I_s e^{j\omega t})$ تنها لازم است که اندازه و فاز $H(j\omega)$ را از روی دسته متغنی‌ها پیدا کنیم. چون $I_R = H(j\omega) I_s$ ،

$$i_R(t) = \text{Re}[H(j\omega) I_s e^{j\omega t}] \quad (1-10)$$

$$= |H(j\omega)| |I_s| \cos[\omega t + \angle I_s + \angle H(j\omega)]$$



شکل ۷-۶ = پاسخ فرکانس مدارهای تشدید

تبصره ۹ = امپدانس و ادmittانس نقطه تحریک‌حالت‌های خاصی از مفهوم کلی توابع شبکه میباشند. اگر معادله (۱۰-۶) را با معادله (۱۳-۴) مقایسه کنیم، مشاهده میشود که برای پیدا کردن شکل موج خروجی حالت دائمی سینوسی از روی شکل موج ورودی سینوسی و تابع شبکه قواعد یکسانی حکمفرماست.

تبصره ۷ = دسته منحنی‌های شکل (۷-۶)، برای مدار تشدید سری نشان داده شده در شکل (۸-۶) نیز صادق است و تنها لازم است که تعریف مناسبی برای Q رابطه را بدست آورد یعنی $Q \triangleq \frac{\omega_0 L}{R_s}$ (جدول ۱-۵ را ببینید). تابع شبکه برای یک مدار سری با رابطه $H = \frac{V_R}{V_s}$ تعریف میشود.

تمرین = گیریم منبع جریان ورودی با $i_s(t) = \cos \omega t$ مشخص شود. فازورهای جریان I_R را در مدارهای RLC موازی که با $\omega_0 = 1$ رادیان بر ثانیه و ترتیب با $Q = \frac{1}{\gamma}$ ، 2 ، 10 مشخص میشوند تعیین کنید.

«پاسخ فرکانس» چون $H(j\omega)$ تمام اطلاعات لازم مربوط به پاسخ حالت دائمی سینوسی را شامل میباشد، منحنی‌های اندازه و فاز $H(j\omega)$ (برحسب ω یا $\log \omega$) را پاسخ فرکانس مدار برای آن ورودی و خروجی مشخص شده گویند (در مورد مدارهای تشدید موازی، ورودی و خروجی به ترتیب I_s و I_R میباشند) برای بدست آوردن یک تعبیر فیزیکی از پاسخ فرکانس، پاسخ حالت دائمی سینوسی مدار را برای چندین مقدار فرکانس در نظر خواهیم گرفت. مثل حالت فوق گیریم $I_s(j\omega)$ نمایش فازوری جریان ورودی در فرکانس زاویه‌ای ω باشد. در اینصورت فازور خروجی که پاسخ حالت دائمی سینوسی را در فرکانس زاویه‌ای ω نشان میدهد، $I_R(j\omega)$ بوده و از تعریف تابع شبکه داریم:

$$I_R(j\omega) = H(j\omega) I_s(j\omega) \quad (۱۶-۶ \text{ الف})$$

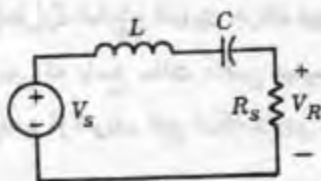
بنابراین، اندازه فازور خروجی با رابطه زیر به اندازه فازور ورودی مربوط است:

$$|I_R(j\omega)| = |H(j\omega)| |I_s(j\omega)| \quad (۱۶-۶ \text{ ب})$$

بطریق مشابه، فاز فازور خروجی با رابطه زیر به فاز فازور ورودی مربوط است.

$$\angle I_R(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle I_s(j\omega) \quad (16-6)$$

بخصوص، اگر $H(j\omega) = 1$ باشد، فازور خروجی همانند فازور ورودی است. اگر $H(j\omega) = 0$ باشد، فازور خروجی صفر است. معادله (۱۱-۶) نشان می‌دهد که برای مدار تشدید، تابع شبکه H در فرکانس تشدید مساوی ۱ و در $\omega = 0$ و $\omega = \infty$ مساوی صفر است. بنابراین گویند که یک مدار تشدید، در فرکانس تشدید سیگنال‌ها را عبور داده و در فرکانس‌های صفر و بینهایت مانع عبور آنها می‌شود. در سایر فرکانسها اندازه و فاز سیگنال‌ها طبق منحنی‌های شکل (۷-۶) تغییر می‌کنند. بنابراین، درست در نزدیکی‌های فرکانس تشدید، سیگنالهای ورودی با کاهش کوچکی در اندازه و تغییر مختصری در فاز آنها از مدار عبور می‌کنند. در فرکانس‌های پائین ($\omega \ll \omega_0$) و در فرکانس‌های بالا ($\omega \gg \omega_0$) دامنه خروجی بمقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. بخاطر همین حقیقت، یک مدار تشدید را یک فیلتر «میان‌گذر»^(۱) می‌نامیم. مدار تشدید تنها سیگنالهایی را که فرکانس آنها در مجاورت فرکانس تشدید است از خود عبور می‌دهد. شکل منحنی‌های اندازه و فاز یک مدار تشدید به ضریب کیفیت Q بستگی دارد. یک Q بزرگتر، باند گذر باریکتری را بوجود می‌آورد. یک فیلتر میان‌گذر ایده‌آل دارای منحنی اندازه‌ای بصورت نشان داده شده در شکل (۹-۶) می‌باشد. در حالت ایده‌آل، تمام سیگنالهای داخل باند گذر^(۲)، بدون هیچگونه تغییری در فاز و اندازه عبور می‌کنند و در خارج از باند گذر خروجی بطور یکنواخت صفر است. معذرا، منحنی اندازه شکل (۹-۶) را از نظر فیزیکی نمیتوان بدست آورد.



شکل ۸-۹ = مدار تشدید سری یا $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ و $Q = \frac{\omega_0 L}{R_s}$

برای یک مدار فیلتر عملی (مثل مدار تشدید) باند گذر را میتوان بطرق مختلفی تعریف کرد. متداولترین تعریفی که بکار میرود، باند گذر ± 3 db میباشد و آن بدین معنی است که در لبه های باند عبور، $|H(j\omega)|$ مساوی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر مقدار ماکزیمم باند گذر است. از معادله (۱۳-۶) دیده میشود که اندازه ماکزیمم $|H(j\omega)|$ در $\omega = \omega_0$ بوده و مقدار آن مساوی ۱ است. با قراردادن $H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ داریم:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

یا:

+ کلمه db برای مخفف دسیبل^(۱) بکار میرود. ولتاژها و جریانها را میتوان با فرمولهای

زیر برحسب دسیبل بیان کرد.

$$\text{برحسب ولت} \quad \text{ولتاژ} = 20 \log \quad \text{برحسب دسیبل} \quad \text{ولتاژ}$$

(و بطریق مشابه برای جریان). تابع انتقال H که نسبت جریانها میباشد نیز برحسب دسیبل چنین بیان میشود:

$$|H(j\omega)| \quad \text{برحسب دسیبل} = 20 \log |H(j\omega)|$$

چون در حالت مورد بررسی $H(j\omega_0) = 1$ ، پس تابع انتقال در ω_0 ، ۰ db و 0° میباشد. چون

$$-3 \approx 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{است، اگر برای فرکانس } \omega_1 \text{، } |H(j\omega_1)| \text{ مساوی } -3 \text{ db باشد}$$

بدین معنی است که:

$$\frac{|H(j\omega_1)|}{|H(j\omega_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$$

از حل معادله بالا برای مقادیر مثبت ω برحسب Q ، بدست می‌آید:

$$(1-17) \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \pm \frac{1}{2Q}$$

در مورد مقادیر بزرگ Q ($Q \gg 1$)، با استفاده از:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

بدست می‌آوریم:

$$(1-18) \quad \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}$$

بنابراین باند عبور را می‌توان بصورت باند بین فرکانس‌های ω_1 و ω_2 تعریف نمود که در آن:

$$(1-19) \quad \omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \quad \omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) \quad Q \gg 1$$

فرکانس‌های:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

فرکانس‌های قطع^(۱) 3-db نامیده میشوند و $f_2 - f_1 = \Delta f$ را نیز به‌نای باند^(۲) 3-db گویند و برحسب هرتز چنین بیان میشود:



شکل ۹-۹- منحنی اندازه برای یک فیلتر میان‌گذر ایده‌آل

$$(۶-۲۰) \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{f_0}{Q} = \frac{\alpha}{\pi}$$

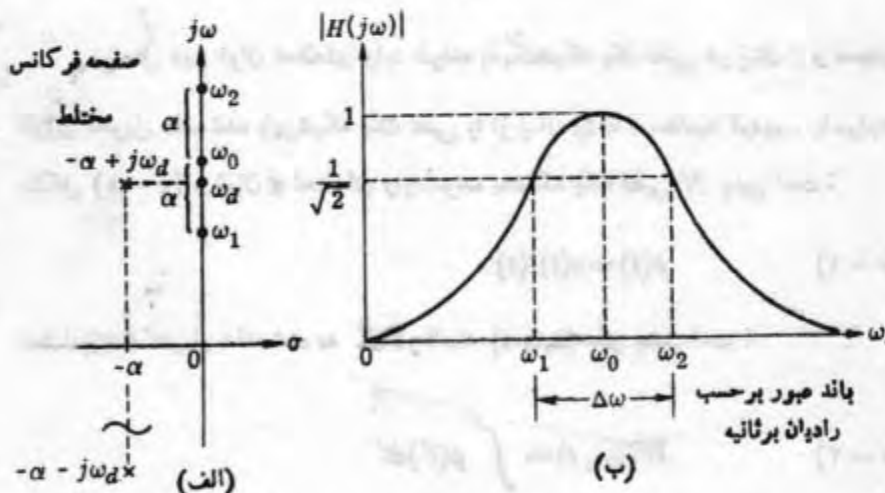
درفصل ۵، مدارهای مرتبه دوم را برحسب قرارگرفتن فرکانس های طبیعی آنها در صفحه فرکانس مختلط و با برحسب مقدار ضریب کیفیت Q طبقه بندی کردیم. برای $\infty > Q > \frac{1}{2}$ مدار را میرای ضعیف نامیده و فرکانس های طبیعی آنرا چنین مشخص کردیم:

$$\left\{ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm j\omega_d$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$$

و:



شکل ۱۰-۶- (الف) فرکانس های طبیعی در صفحه فرکانس مختلط و باند عبور

نظیر آن برای یک مدار تشدید با Q بزرگ. (ب) منحنی اندازه (برای $Q \gg 1$)، $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$

$$(۶-۲۱) \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

صفحه فرکانس مختلط و همچنین منحنی اندازه در شکل (۶-۱۰) نشان داده شده‌اند تا بسیاری از روابط جالب میان محل‌های فرکانس‌های طبیعی در $\omega \pm \alpha$ ، فرکانس تشدید ω_0 ، پهنای باند $\omega_1 - \omega_2$ و فرکانس‌های قطع ω_1 و ω_2  نشان داده شوند. شکل (۶-۱۰) برای حالتی که Q بزرگ سیباشد رسم شده است. برای $Q \gg 1$ ، با حذف جملات $\frac{1}{Q^2}$ ، از معادلات (۶-۱۹) و (۶-۲۱) روابط زیر حاصل میشوند:

$$(۶-۲۲) \quad \omega_d \approx \omega_0 \quad \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha$$

نتایج اصلی مدارهای تشدید سری و موازی را برای راحتی در جدول (۷-۱) خلاصه میکنیم.

۷- توان در حالت دائمی سینوسی

در فصل دوم توان لحظه‌ای وارد شونده به یک شبکه یک قطبی در زمان t و همچنین انرژی تحویل داده شده باین شبکه یک قطبی را از زمان t_0 تا t محاسبه کردیم. با مراجعه بشکل (۷-۱) «توان» لحظه‌ای وارد شونده به شبکه یک قطبی N چنین است:

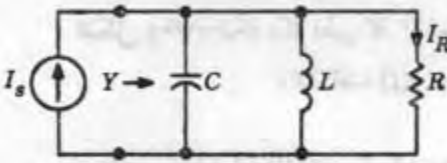
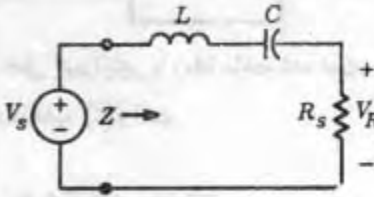
$$(۷-۱) \quad p(t) = v(t)i(t)$$

و «انرژی» تحویل داده شده به N در فاصله $(t_0$ و $t)$ نیز چنین است:

$$(۷-۲) \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(t') dt'$$

در این بخش معادلات فوق را برای محاسبه توان و انرژی در حالت دائمی سینوسی بکار خواهیم برد.

جدول ۱-۷- خواص حالت دائمی سینوسی مدارهای تشدید

مدار تشدید موازی	مدار تشدید سری
	
$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$	$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s}$
$\alpha = \frac{1}{2RC}$	$\alpha = \frac{R_s}{2L}$
$H(j\omega) \triangleq \frac{I_R}{I_s}; \quad Y(j\omega) = \frac{1}{RH(j\omega)}$	$H(j\omega) \triangleq \frac{V_R}{V_s}; \quad Z(j\omega) = \frac{R_s}{H(j\omega)}$

$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

اگر $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (حالت میرای ضعیف) فرکانسهای طبیعی برابر $\omega_0 \pm j\alpha$ هستند که در آنجا

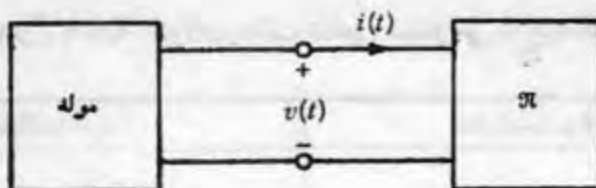
$$\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}. \quad \text{If } Q > 1, \omega_d \approx \omega_0.$$

فرکانسهای قطع زاویه ۳-dB

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{cases}$$

رادیان بر ثانیه باند پهنای ۳-dB $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$

$$\Delta f = f_2 - f_1 \approx \frac{f_0}{Q} \quad \text{Hz}$$



شکل ۷-۱- شبکه یک قطبی N از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. ولتاژ قطب $v(t)$ و جریان قطب $i(t)$ است

۷-۱- توان لحظه‌ای، توان متوسط و توان مختلط

فرض کنید که در حالت دائمی سینوسی، ولتاژ قطب شبکه یک قطبی N چنین باشد:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \angle V) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) \quad (۷-۳ \text{ الف})$$

که در آن:

$$V \triangleq V_m e^{j\angle V} \quad V_m = |V| \quad (۷-۳ \text{ ب})$$

فرض کنید که جریان قطب شبکه چنین باشد:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \angle I) = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t}) \quad (۷-۴ \text{ الف})$$

که در آن:

$$I \triangleq I_m e^{j\angle I} \quad I_m = |I| \quad (۷-۴ \text{ ب})$$

آنگاه از معادله (۷-۱)، «توان لحظه‌ای» وارد شوند، به N چنین است:

$$\begin{aligned} (۷-۵) \quad p(t) &= v(t)i(t) \\ &= V_m I_m \cos(\omega t + \angle V) \cos(\omega t + \angle I) \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \angle V + \angle I) \end{aligned}$$

جریان i ، ولتاژ v و توان لحظه‌ای p در شکل (۷-۲) رسم شده‌اند. جمله اول در رابطه توان در معادله (۷-۵) یک ثابت بوده در حالیکه جمله دوم یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای 2ω

میباشد. هرگاه توان متوسط را در طول یک پریود $T = \frac{2\pi}{\omega}$ محاسبه نمائیم، جمله دوم همیشه مساوی صفر خواهد بود (زیرا مقدار متوسط هر سینوسی در طول هر مضرب صحیحی از پریود آن صفر است). بنابراین با نشان دادن «توان متوسط» بصورت P_{av} بدست می‌آریم:

$$P_{av} \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T p(t') dt' \quad (۶-۷ \text{ الف})$$

بنابراین:

$$P_{av} = \frac{1}{T} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) \quad (۶-۷ \text{ ب})$$

تبصره ۱- زاویه $\angle V - \angle I$ که آرگومان کسینوس در معادله (۶-۷ ب) میباشد عبارت از اختلاف فاز بین ولتاژ سینوسی و جریان سینوسی است. چون $V = ZI$ ، یعنی $\angle V - \angle I = \angle Z$ ، مساوی زاویه اسپدانس شبکه یک قطبی مورد بررسی نیز میباشد. بنابراین میتوان با تغییر دادن زاویه اسپدانس و در عین حال ثابت نگاه داشتن دامنه آن، توان متوسط دریافت شده توسط یک شبکه یک قطبی را تغییر داد.

تبصره ۲- P_{av} عبارت از مقدار متوسط توان لحظه‌ای $p(t)$ که در «طول یک پریود» وارد شبکه یک قطبی میشود میباشد. شکل نمونه‌ای از p بر حسب زمان در شکل (۷-۲) نشان داده شده است. در بیشتر موارد، شبکه یک قطبی N تنها شامل اجزاء پسیو میباشد، یعنی تمام مقاومتها، سلف‌ها و خازن‌ها مثبت هستند. در نتیجه سلف‌ها و



شکل ۷-۲ - شکل موجهای ولتاژ و جریان حالت دائمی سینوسی، و توان لحظه‌ای و متوسط

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

خازن‌ها انرژی ذخیره نموده و مقاومت‌ها انرژی تلف میکنند. بموجب اصل بقاء^(۱) انرژی، توان متوسط وارد شونده به شبکه یک قطبی N در حالت دائمی سینوسی بایستی نامنفی (≥ 0) باشد. این حقیقت که توان «متوسط» همیشه بزرگتر و یا مساوی صفر است، ملزم نمیدارد که برای تمام مقادیر t ، $p(t) \geq 0$ باشد. چنانکه در شکل (۲-۷) نشان داده شده است توان لحظه‌ای $p(t)$ میتواند در هر پریود، در فواصلی از زمان منفی باشد.

تبصره ۳۵- ساده‌ترین راه برای محاسبه توان متوسط که به شبکه یک قطبی N تحویل داده میشود بقرار زیر است. در حالت دائمی سینوسی عبارت:

$$P \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T VI \, dt$$

را بعنوان توان مختلط تحویل داده شده به شبکه یک قطبی N تعریف میکنیم. در اینجا از تیره بالای I بمنظور مشخص کردن مزدوج مختلط استفاده شده است. در اینصورت:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T |V| |I| e^{j(\angle V - \angle I)} \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |V| |I| \cos(\angle V - \angle I) \, dt + j \frac{1}{T} \int_0^T |V| |I| \sin(\angle V - \angle I) \, dt \end{aligned}$$

بموجب معادله (۶-۷)، جزء حقیقی توان مختلط P مساوی توان متوسط میباشد:

$$P_{av} = \text{Re}(P) = \text{Re} \left(\frac{1}{T} \int_0^T VI \, dt \right) \quad (\text{الف } ۷-۷)$$

تبصره ۴- گیریم $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ بترتیب امپدانس نقطه تحریک و ادmittانس نقطه تحریک شبکه یک قطبی در فرکانس ω باشند. چون $V=ZI$ و $I=YV$ ، معادله (۷-۷ الف) چنین میشود:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |I|^2 \text{Re}[Z(j\omega)] \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T |V|^2 \text{Re}[Y(j\omega)] \, dt \quad (\text{ب } ۷-۷)$$

معادله (۷-۷ ب) به نتیجه مهمی منجر میشود. فرض کنید شبکه یک قطبی از اجزاء

«پسیو» ساخته شده باشد. در این صورت کاملاً واضح است که P_{av} بایستی نامنفی باشد⁺. بنابراین امپدانس «نقطه تحریک» Z و ادmittانس «نقطه تحریک» Y «هر» شبکه یک قطبی که از اجزاء «پسیو» ساخته شده باشد نامعادلات زیر را برمیآورد.

$$\text{Re}[Z(j\omega)] \geq 0 \quad \text{Re}[Y(j\omega)] \geq 0 \quad \omega \quad \text{برای تمام مقادیر}$$

و یا از معادله (۶-۷)، $\cos(\angle V - \angle I) \geq 0$ که معادل است با:

$$|\angle Z(j\omega)| \leq 90^\circ \quad \text{و} \quad |\angle Y(j\omega)| \leq 90^\circ \quad \omega \quad \text{برای تمام مقادیر}$$

معادلات (۸-۷ الف) و (۸-۷ ب) بقدری مهم میباشند که در فصل نهم آنها را بروش دیگری نیز بدست خواهیم آورد.

۷-۲- خاصیت جمع پذیری توان متوسط

فرض کنید که شبکه یک قطبی N با یک ورودی، که مجموع چندین سینوسی با فرکانس های «متفاوت» میباشد تحریک میشود و گیریم که شبکه یک قطبی در حالت دائمی باشد. در این صورت ورودی سینوسی، یک خروجی سینوسی با همان فرکانس ایجاد کرده و خروجی کل از مجموع این سینوسی ها تشکیل میشود فرض کنید جریان ورودی چنین باشد.

$$i(t) = I_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + I_{rm} \cos(\omega_r t + \psi_r)$$

و امپدانس ورودی نیز تابع معلوم $Z(j\omega)$ باشد. آنگاه در حالت دائمی:

$$v(t) = I_{1m} |Z(j\omega_1)| \cos[\omega_1 t + \psi_1 + \angle Z(j\omega_1)]$$

$$+ I_{rm} |Z(j\omega_r)| \cos[\omega_r t + \psi_r + \angle Z(j\omega_r)]$$

برای سهولت $v(t)$ را باین شکل مینویسیم:

$$v(t) = V_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + V_{rm} \cos(\omega_r t + \Phi_r)$$

که در آن:

⁺ این مطلب در فصل نهم اثبات خواهد شد.

$$\Phi_1 \triangleq \psi_1 + \angle Z(j\omega_1)$$

$$\Phi_2 \triangleq \psi_2 + \angle Z(j\omega_2)$$

توان لحظه‌ای که وارد شبکه یک قطبی N میشود چنین است :

$$\begin{aligned} p(t) = v(t)i(t) &= \frac{1}{\gamma} V_{1m} I_{1m} \cos(\Phi_1 - \psi_1) \\ &+ \frac{1}{\gamma} V_{2m} I_{2m} \cos(\Phi_2 - \psi_2) + \frac{1}{\gamma} V_{1m} I_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1 + \psi_1) \\ &+ \frac{1}{\gamma} V_{2m} I_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2 + \psi_2) \\ &+ \frac{1}{\gamma} V_{1m} I_{2m} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \Phi_1 + \psi_2] \\ &+ \frac{1}{\gamma} V_{1m} I_{2m} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_1 - \psi_2] \\ &+ \frac{1}{\gamma} V_{2m} I_{1m} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \psi_1 + \Phi_2] \\ &+ \frac{1}{\gamma} V_{2m} I_{1m} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \psi_1 - \Phi_2] \end{aligned} \quad (7-9)$$

معادله (۷-۹) نشان میدهد که «توان لحظه‌ای» مساوی مجموع توانهای لحظه‌ای، ناشی از جریانها با فرکانسهای ω_1 و ω_2 که پهنائی روی مدار اثر کنند «نیست». درحقیقت مجموع فقط از چهار جمله اول سمت راست معادله (۷-۹) تشکیل میشود. از طرف دیگر «توان متوسط» مساوی مجموع توان متوسط در ω_1 و توان متوسط در ω_2 میباشد. درحقیقت وقتی

+ محاسبه مقدار متوسط سمت راست معادله (۷-۹) همیشه کار ساده‌ای نیست. موردی را در نظر بگیرید که فقط یک سینوسی تنها وجود دارد (معادله ۷-۵) در این مورد سمت راست یک تابع تناوبی بوده و پریود آن $T \triangleq \frac{2\pi}{\omega}$ میباشد. بنابراین توان متوسط P_{av} با (۷-۶) الف

مقدار متوسط گرفته شود تنها دو جمله اول سمت راست باقی میمانند. بعبارت دیگر، در حالت دائمی خاصیت جمع آثار^(۱) برای توان «متوسط» بشرط اینکه فرکانسها متفاوت باشند برقرار است.

تمرین - بایک مثال نشان دهید که اگر دو منبع سینوسی دارای فرکانس «یکسان» بوده و هر دو به یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان توان تحویل دهند، توان متوسط داده شده به مدار وقتی که هر دو منبع با هم عمل میکنند، الزاماً مساوی مجموع توانهای متوسط

← داده میشود. حالت معادله (۹-۷) مهرگاه فرکانسهای ω_1 و ω_2 بطور هارمونیک بهم مربوط باشند، یعنی «اعداد درست»^(۲) n_1 و n_2 طوری وجود داشته باشند که $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ ساده است. کوچکترین مضرب مشترک n_1 و n_2 را در نظر گرفته و آنرا n بنامید. گیریم $p_2 \triangleq \frac{n}{n_2}$ و $p_1 \triangleq \frac{n}{n_1}$ باشند که p_1 و p_2 اعداد درست اند. در اینصورت سینوسیهای با فرکانسهای ω_1 ، ω_2 ، $\omega_1 + \omega_2$ و $\omega_1 - \omega_2$ دارای پویود «مشترک» $T_c = p_1 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} \right) = p_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right)$ میباشد و در نتیجه سمت راست (۹-۷) تناوبی با پریود T_c خواهد بود و بنابراین توسط معادله (۶-۷ الف) محاسبه شده که در آن بجای T ، مقدار T_c جایگزین میشود و نتایج داده شده در متن درس بلافاصله حاصل میگردد. اگر فرکانسهای ω_1 و ω_2 بطور هارمونیک بهم مربوط نباشند (مثلاً اگر $\omega_1 = 1$ رادیان بر ثانیه و $\omega_2 = \sqrt{2}$ رادیان بر ثانیه) آنگاه سمت راست معادله (۹-۷) یک تابع تناوبی نبوده و نمیتوان برای محاسبه آن از معادله (۶-۷ الف) استفاده نمود. اما مفهوم توان متوسط را باز هم میتوان بایک رابطه حتمی بشرح زیر تعریف کرد.

$$P_{av} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} p(t) dt$$

نتایج بیان شده در متن درس، اگرچه به محاسبات طولانی احتیاج دارند، مستقیماً از این تعریف اصلاح شده بدست میآیند.

دو منبع وقتی که هریک به تنهایی روی مدار عمل میکنند نخواهد بود. امیدانسن نقطه تحریک مدار را در فرکانس مورد نظر Z بناسید.

۷-۳- مقادیر مؤثر و یا ریشه مقدار متوسط توان دوم

پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان، با مقاومت R را در نظر بگیرید. از معادله (۷-۱) داریم:

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \psi)$$

از معادله (۷-۶) یا (۷-۷) توان متوسط چنین است:

$$P_{av} = \frac{1}{T} I_m^2 R = \frac{1}{T} I_m V_m$$

گیریم مقدار مؤثر^(۱) یک شکل موج سینوسی از تقسیم دامنه و یا مقدار نوك^(۲) آن بر $\sqrt{2}$ تعریف شود. بنابراین:

$$(۷-۱۰) \quad I_{eff} \triangleq \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad V_{eff} \triangleq \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

و آنگاه:

$$(۷-۱۱) \quad P_{av} = I_{eff}^2 R = I_{eff} V_{eff}$$

بعنوان مثال، ولتاژ معمولی خانگی ۲۲۰ ولت مؤثر است، که دامنه نظیر آن $220\sqrt{2}$ ولت میباشد. بطریق مشابه در بسیاری از ولت‌مترها و آمپر‌مترها، مقادیر مؤثر خوانده میشوند. برای بدست آوردن دامنه و یا مقدار نوك، بایستی مقدار مؤثر را در $\sqrt{2}$ ضرب نمود. برای یک شکل «موج تناوبی» اما غیر سینوسی، مقدار مؤثر را میتوان برحسب انتگرال‌های زیر تعریف نمود.

$$(۷-۱۲) \quad I_{eff} \triangleq \left[\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{الف})$$

$$V_{\text{eff}} \triangleq \left[\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۱۲-۷ \text{ ب})$$

که در آن $i(\cdot)$ و $v(\cdot)$ توابع تناوبی با پریود T میباشند. اهمیت تعاریف (۱۲-۷ الف) و (۱۲-۷ ب) در این است که توان متوسط تحویل شده بوسیله یک تابع تناوبی به یک مقاومت با مقاومت R مساویست با:

$$P_{\text{av}} = I_{\text{eff}}^2 R = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \quad (۱۳-۷)$$

این موضوع واضح است زیرا طبق تعریف داده شده در معادله (۶-۷)، P_{av} چنین است:

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt$$

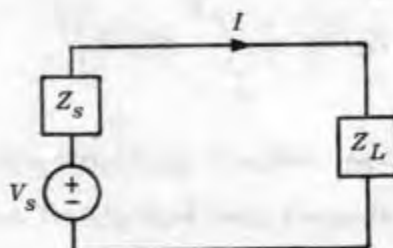
$$= \frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^2(t)}{R} dt \quad (۱۴-۷)$$

با مقایسه معادلات (۱۲-۷) و (۱۴-۷) معادله (۱۳-۷) بلافاصله حاصل میشود. در معادله (۱۲-۷) مقادیر مؤثر، بر حسب ریشه دوم مقدار متوسط توان دوم مقادیر ولتاژ و جریان تعریف شده‌اند و بنابراین نام «ریشه - مقدار متوسط - توان دوم»^(۱) مصداق پیدا میکند.

۷-۴- قضیه انتقال توان ماکسیمم

مسئله‌ای با اهمیت عملی بسیار زیاد در شکل (۳-۷) تشریح شده است. در این مدار Z_L نشان دهنده یک اسپدانس پیسو «داده شده» و V_s نمایش فازوری منبع ولتاژ سینوسی «داده شده» در فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. بنابراین:

$$v_s(t) = \text{Re}(V_s e^{j\omega t})$$



شکل ۳-۷- مداری که انتقال توان از یک منبع به یک بار را نشان می‌دهد

امپدانس Z_L ، یک امپدانس بارپیو را نشان می‌دهد که مقدار آن بایستی چنان انتخاب شود تا توان متوسطی که وارد امپدانس بار Z_L (در حالت دائمی سینوسی) می‌گردد ماکسیمم باشد. بعنوان مثال، ممکن است منظور طرح طبقه اول یک دستگاه رادار^(۱) و یا تلسکوپ^(۲) رادیویی باشد. منبع ولتاژ v_s امواج الکترومغناطیسی ورودی را نشان می‌دهد و امپدانس Z_s ، امپدانس فضای آزاد^(۳)، کابل‌ها^(۴) موج‌برها^(۵) و غیره است که به مرحله اول منتهی می‌شود. مسأله انتخاب بهترین امپدانس ورودی Z_L برای طبقه اول است بطوریکه بالاترین توان ممکن باین طبقه تحویل شود.

قضیه انتقال توان ماکسیمم بیان می‌دارد که «آپتیمم مقدار امپدانس بار Z_{L0} مساوی مزدوج مختلط Z_s »، یعنی، $Z_{L0} = \bar{Z}_s$ می‌باشد.

«اثبات» تمام محاسباتی که ذیلاً انجام می‌شود شامل امپدانس هادفرکانس زاویه‌ای ω منبع می‌باشند. به منظور سادگی طرز نمایش، Z_L را بجای $Z_L(j\omega)$ بکار خواهیم برد. توان متوسط تحویل شده به Z_L برحسب فازور جریان I چنین است.

$$P_{av} = \frac{1}{T} |I|^2 \text{Re}(Z_L)$$

چون:

$$I = \frac{V_s}{Z_s + Z_L}$$

۱ - Radar

۲ - Telescope

۳ - Free space

۴ - Cables

۵ - Waveguides

نتیجه میشود که :

$$P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{\operatorname{Re}(Z_L)}{|Z_s + Z_L|^2}$$

گیریم ، جزءهای حقیقی و انگاری Z_L و Z_s بترتیب R_L ، R_s ، X_L و X_s باشند .
داریم :

$$P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2 + (X_L + X_s)^2}$$

در اینجا V_s ، R_s و X_s داده شده‌اند و مقادیر R_L و X_L باید چنان انتخاب شوند تا P_{av} ماکسیمم گردد . چون راکتانس X_L میتواند مثبت و یا منفی باشد ، میتوان $X_L = -X_s$ انتخاب نمود تا جمله $(X_L + X_s)^2$ درخرج کسرمساوی صفر شود . بعنوان مثال ، گیریم Z_s اتصال سری یک مقاومت و یک سلف با اندوکتانس ۱ هانری بوده و $\omega = 2$ رادیان بر ثانیه باشد . آنگاه $X_s = \omega L = 2$ اهم خواهد بود . X_L مورد نیاز مساوی -2 اهم است که میتوان توسط یک خازن با ظرفیت $\frac{1}{4}$ فاراد بدست آورد . با این انتخاب P_{av} ،
چنین میشود :

$$(v-10) \quad P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2}$$

اکنون بایستی مقدار آپتیمم R_L را تعیین نمود . با گرفتن مشتق جزئی از P_{av} نسبت به R_L بدست میآوریم :

$$(v-11) \quad \frac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{(R_L + R_s)^2 - 2(R_L + R_s)R_L}{(R_L + R_s)^4}$$

برای آپتیمم کردن P_{av} ، $\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L}$ را مساوی صفر قرار میدهم و در نتیجه از (v-11) ،

$R_L = R_s$ بدست می‌آید . توان ماکسیمم از معادله (v-10) چنین است :

$$(۷-۱۷) \quad \max P_{av} = \frac{|V_s|^2}{4R_s}$$

و در شرایطی بدست می‌آید که داشته باشیم :

$$(۷-۱۸) \quad Z_{L0} = R_s - jX_s = \bar{Z}_s$$

وقتی این شرط برقرار باشد گویند امپدانس بار با امپدانس منبع بطور مزدوج تطبیق شده^(۱) است و یا عبارت ساده‌تر گویند که بار با منبع تطبیق شده است.

معادله (۷-۱۷) توان متوسط ماکسیمم را که به بار تحویل میشود بدست می‌دهد. جالب توجه است که این توان را با توان متوسطی که توسط منبع تحویل داده میشود مقایسه کنیم واضح است که توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع چنین است :

$$(۷-۱۹) \quad P_s = \frac{1}{2} |I|^2 \operatorname{Re}(Z_s + Z_L)$$

در تحت شرایط تطبیق شده مزدوج (۷-۱۸) داریم :

$$I = \frac{V_s}{Z_{L0} + Z_s} = \frac{V_s}{2R_s}$$

بنابراین معادله (۷-۱۹) چنین میشود :

$$(۷-۲۰) \quad P_s = \frac{1}{2} \frac{|V_s|^2}{4R_s^2} 2R_s = \frac{|V_s|^2}{4R_s}$$

میتوان « بهره »^(۲) مدار را با نسبت توان متوسط تحویل شده به بار به توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع تعریف نمود. با مقایسه معادلات (۷-۱۷) و (۷-۲۰) ملاحظه میکنیم که بهره مدار تطبیق شده مزدوج مساوی ۵۰ درصد است. برای رادارها و رادیو-تلسکوپ‌ها این حقیقت هیچ اهمیت ندارد، زیرا انرژی موجود در امواج الکترومغناطیسی ورودی اگر توسط طبقه اول جذب نشود از میان خواهد رفت. برای مهندسين نیرو وضع کاملاً برعکس است. انرژی تحویل داده شده توسط منبع ارزش پولی داشته و شرکت‌های تولید نیرو به‌ازدپاد بهره‌بشدت علاقمند هستند و میخواهند توان متوسط تولید شده آنها

هرچه بیشتر به بار (یعنی مشتری) تحویل داده شود. نتیجتاً آلترناتورهای بزرگ هیچگاه بطور مزدوج تطبیق شده نیستند.

۵-۷-۱ Q یک مدار تشدید

در اینجا یک تعبیر انرژی از ضریب کیفیت Q یک مدار تشدید را بیان خواهیم داشت. برای مدار تشدید موازی نشان داده شده در جدول (۱-۷) داریم:

$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{\gamma \alpha} = \omega_0 CR$$

اگر V فازور ولتاژ در «حالت تشدید» باشد، میتوان نوشت:

$$(۷-۲۱) \quad Q = \omega_0 \frac{\frac{1}{\gamma} C |V|^2}{\frac{1}{\gamma} G |V|^2}$$

عبارت $\frac{1}{\gamma} G |V|^2$ درمخرج کسر، توان متوسط تلف شده در مقاومت را در حالت تشدید نشان میدهد. برای تعبیر عبارت صورت کسر، بخاطر آورد که در فصل دوم نشان دادیم که انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک خازن خطی چنین است:

$$(۷-۲۲) \quad \mathcal{E}_E(t) = \frac{1}{\gamma} C v^2_C(t)$$

و انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک سلف خطی چنین است:

$$(۷-۲۳) \quad \mathcal{E}_M(t) = \frac{1}{\gamma} L i^2_L(t)$$

برای مدار تشدید در فرکانس ولتاژ دو سر خازن چنین است:

$$(۷-۲۴) \quad v_C(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega_0 t}) = |V| \cos(\omega_0 t + \angle V)$$

و جریان داخل سلف نیز چنین میباشد.

$$i_L(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{V}{j\omega_0 L} e^{j\omega_0 t}\right) = \frac{|V|}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t + \angle V - 90^\circ)$$

$$(۷-۲۵) \quad = \frac{|V|}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t + \angle V)$$

از معادلات (۷-۲۲) تا (۷-۲۵) انرژی کل ذخیره شده چنین است:

$$g(t) = g_E(t) + g_M(t)$$

$$= \frac{1}{2} C |V|^2 \cos^2(\omega_0 t + \angle V) + \frac{1}{2} L \frac{|V|^2}{\omega_0^2 L^2} \sin^2(\omega_0 t + \angle V)$$

چون $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ است، بدست می‌آوریم:

$$(۷-۲۶) \quad g(t) = \frac{1}{4} C |V|^2$$

بنابراین، درحالت تشدید انرژی کل ذخیره شده «ثابت» است، یعنی انرژی کل ذخیره شده $g(t)$ به t بستگی ندارد. از معادله (۷-۲۱)، Q را میتوان چنین تعبیر کرد: «درحالت تشدید»:

$$(۷-۲۷) \quad Q = \omega_0 \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{توان متوسط تلف شده در مقاومت}}$$

این فرمول برای مدار RLC سری در حالت تشدید نیز برقرار می‌باشد.

تمرین - نشان دهید که برای مدار RLC موازی، درحالت تشدید:

$$(۷-۲۸) \quad Q = 2\pi \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در یک سیکل}}$$

توجه کنید که درحالت تشدید، پریود تمام شکل موجها $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ثانیه است.

* ۸- نرمالیزه کردن امپدانس و فرکانس

مدارهای تشدید که در بخش ۶ بررسی کردیم دارای سه پارامتر یعنی مقاومت، اندوکتانس و ظرفیت می‌باشند. این چنین مدارهای تشدید معمولاً بعنوان فیلتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک نمونه مسأله طرح ممکن است بصورت زیر باشد: یک مدار تشدید سری طرح کنید که دارای سطح امپدانس Z_0 (یعنی، امپدانس درحالت تشدید)، فرکانس تشدید ω_0 و پهنای باند $2-dB$ باشد که در آن Z_0 ، ω_0 و $\Delta\omega$ مقادیر عددی تعیین شده هستند. برای نوشتن روابط بین اقلام تعیین شده و مقادیر اجزاء R و L و C برای مدار تشدید سری از جدول (۷-۱) استفاده می‌کنیم و بدست می‌آوریم:

$$(۱-۸ \text{ الف}) \quad Z_0 = R = \text{سطح امپدانس}$$

$$(۱-۸ \text{ ب}) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \text{فرکانس زاویه‌ای تشدید}$$

$$(۱-۸ \text{ پ}) \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} = \text{پهنای باند } 3\text{-db}$$

برای پیدا کردن L ، $(۱-۸ \text{ پ})$ را بکار برده و بدست می‌آوریم:

$$(۲-۸ \text{ الف}) \quad L = \frac{R}{\Delta\omega}$$

برای پیدا کردن C ، $(۱-۸ \text{ ب})$ را بکار برده و بدست می‌آوریم:

$$(۲-۸ \text{ ب}) \quad C = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 R}$$

روش دیگری برای طرح وجود دارد که معمولاً طراحان مجرب آنرا ترجیح می‌دهند. این روش با طرح یک مدار تشدید سری «نرمالیزه»^(۱)، یعنی یک مدار تشدید سری با یک سطح امپدانس مساوی ۱ اهم، یک فرکانس تشدید زاویه‌ای مساوی ۱ رادیان بر ثانیه و پهنای باند کسری زیر شروع می‌شود:

$$(۳-۸) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

گیریم L_0 ، R_0 و C_0 مقادیر اجزاء مدار نرمالیزه باشند. از معادلات $(۱-۸ \text{ الف})$ و $(۲-۸)$ داریم:

$$(۴-۸) \quad R_0 = 1, \quad L_0 = Q, \quad C_0 = \frac{1}{Q}$$

برای بدست آوردن مقادیر اجزاء مدار مورد نظر بایستی دو تصحیح انجام گیرد. ابتدا سطح امپدانس را به Z_0 می‌رسانیم و آنگاه فرکانس تشدید را به ω_0 تغییر می‌دهیم. میتوان نشان

داد که مقاومت مطلوب با ضرب R_0 در Z_0 ، اندوکتانس با ضرب L_0 در $\frac{Z_0}{\omega_0}$ و ظرفیت

مطلوب با ضرب C_0 در $\frac{1}{Z_0 \omega_0}$ بدست می‌آید. بالاخره خواهیم داشت:

$$(الف \text{ - } ۵) \quad R = Z_0$$

$$(ب \text{ - } ۵) \quad L = \frac{Q Z_0}{\omega_0} = \frac{Z_0}{\Delta \omega}$$

$$(پ \text{ - } ۵) \quad C = \frac{1}{Q \omega_0 Z_0} = \frac{\Delta \omega}{Z_0 \omega_0^2}$$

البته، نتایج نهایی با معادلات (۱-۸) و (۲-۸) توافقی دارند.

برای عمومیت طرح‌های نرمالیزه دو دلیل وجود دارد. اول اینکه هرگاه مهندسی در بایگانی^(۱) خود طرح نرمالیزه یک فیلتر میان‌گذر را داشته باشد (با مشخصات مطلوب خاص)، او در حقیقت مقادیر اجزاء را برای هر فیلتر میان‌گذری از این نوع با هر سطح امپدانس دلخواه و با هر فرکانس میانی دلخواه به‌سبب سهولت در اختیار دارد. دلیل دوم ساده بودن محاسبات عددی است زیرا جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعدادی که اندازه آنها کسری از واحد است بسیار ساده‌تر می‌باشند. بعلاوه خطاهای ناشی از روند کردن^(۲) اعداد که همیشه در محاسبات اتفاق می‌افتند بسیار کم اهمیت‌تر خواهند بود. مدارهایی که در عمل با آنها برخورد می‌کنیم اغلب دارای مقاومت‌هایی در حدود چند صد اهم، ظرفیت‌هایی در حدود چند پیکوفاراد و اندوکتانس‌هایی در حدود چند میکروهنری و فرکانس‌هایی در حدود مگاهرتز هستند. می‌توان نشان داد که در نتیجه نرمالیزاسیون امپدانس و فرکانس، این مقادیر اجزاء به‌حدود مقدار واحد رسیده و بنابراین محاسبات طولانی و خسته‌کننده نسبتاً ساده‌تر می‌شوند.

اکنون می‌خواهیم قاعده عمومی را که با اعمال آن می‌توان مقادیر اجزاء R و L و C مطلوب یک شبکه دلخواه را از روی مقادیر اجزاء نرمالیزه R_0 ، L_0 و C_0 شبکه نرمالیزه بدست آورد بیان کنیم. گیریم r_n ضریب نرمالیزاسیون امپدانس باشد و با عبارت دقیق‌تر گیریم:

$$r_n \triangleq \frac{\text{سطح امپدانس مطلوب}}{\text{سطح امپدانس طرح نرمالیزه شده}}$$

و گیریم Ω_n ضریب نرمالیزاسیون فرکانس باشد و با عبارت دقیقتر گیریم:

$$\Omega_n \triangleq \frac{\text{فرکانس نمونه مطلوب}}{\text{فرکانس نمونه طرح نرمالیزه شده}}$$

در اینصورت، مقادیر اجزاء مطلوب چنین داده میشوند:

$$(۶-۸ الف) \quad R = r_n R_0$$

$$(۶-۸ ب) \quad L = \frac{r_n}{\Omega_n} L_0$$

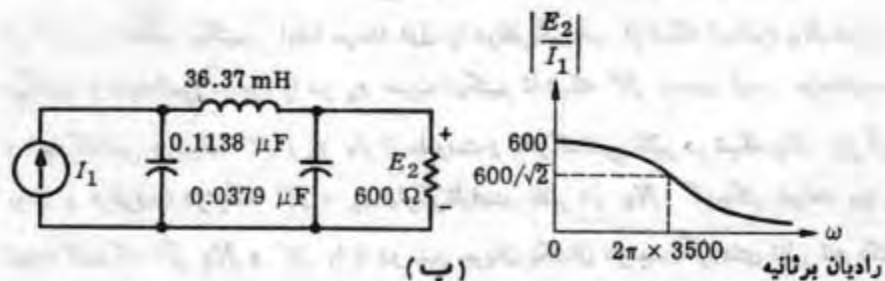
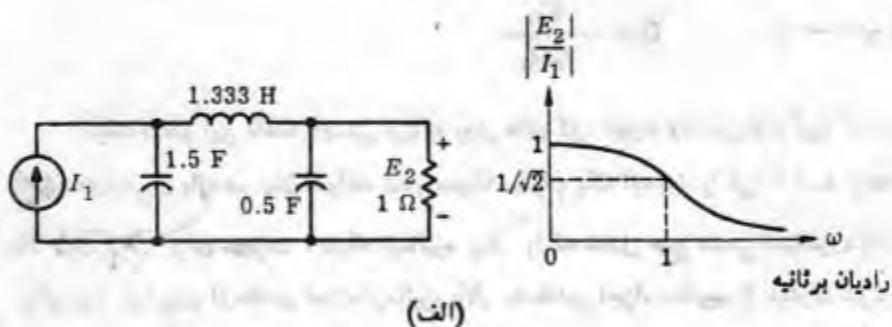
$$(۶-۸ پ) \quad C = \frac{C_0}{r_n \Omega_n}$$

اثبات منظم این قاعده بایستی برپایه روش های کلی تجزیه و تحلیل قرار گیرد که در فصل های دهم و یازدهم بیان خواهد شد. معهذاً میتوان یک توجیه ادراکی^(۱) از سه رابطه بالا بیان کرد. برای سهولت، شبکه نرمالیزه N_0 را که شامل هیچ منبعی نمیباشد در نظر میگیریم. پیشروی از مقادیر اجزاء نرمالیزه N_0 به مقادیر اجزاء مطلوب را میتوان در دو مرحله انجام داد. در مرحله اول، سطح امپدانس را میزان میکنیم و در مرحله دوم مقیاس فرکانس را تنظیم میکنیم. ابتدا مرحله اول را در نظر بگیرید. از شبکه نرمالیزه N_0 شروع میکنیم و امپدانس هر جزء را در r_n ضرب میکنیم تا شبکه N' بدست آید. هر مقاومت و اندوکتانس در شبکه N' ، r_n بار از مقاومت و اندوکتانس نظیر در شبکه N_0 بزرگتر بوده و هر ظرفیت در شبکه N' ، r_n بار از ظرفیت نظیر در N_0 کوچکتر خواهد بود. توجه کنید که اگر N_0 و N' را با دو منبع جریان یکسان در جفت گره های نظیر تحریک کنیم آنگاه ولتاژ گره های N' مساوی r_n برابر ولتاژ گره های نظیر در N_0 خواهد بود. مرحله دوم میزان کردن فرکانس میباشد. شبکه N'' از تقسیم تمام اندوکتانس ها

و ظرفیت‌های شبکه N' بر Ω_n بدست می‌آید. توجه کنید که امپدانس هر شاخه شبکه N'' در فرکانس ω'' هنوز مساوی r_n برابر امپدانس شاخه نظیر شبکه N_0 در فرکانس ω' می‌باشد که در آن $\frac{\omega''}{\omega'} = \Omega_n$ است. بنابراین هرگاه دو شبکه N'' و N_0 در جفت‌گره‌های نظیر، به ترتیب با دو منبع جریان سینوسی با فرکانس‌های ω'' و ω' تحریک شوند و اگر هر دو شبکه در حالت دائمی سینوسی باشند، آنگاه هرولتاژ جفت‌گره N'' با فازوری نمایش داده می‌شود که مساوی r_n برابر فازوری نمایش دهنده ولتاژ جفت‌گره نظیر در شبکه N_0 است.

مثال - شکل (۱ - ۸) الف) یک فیلتر پائین‌گذری^(۱) را نشان می‌دهد که امپدانس

انتقالی^(۲) آن که با $\frac{E_2(j\omega)}{I_1(j\omega)}$ تعریف می‌شود چنانست که :



شکل ۸-۱ - فیلتر پائین‌گذر که نرمالیزاسیون امپدانس و فرکانس را مشخص میکند.

(الف) طرح نرمالیزه شده (ب) طرح واقعی

$$\left| \frac{E_r}{I_1} \right|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

بعبارت دیگر، ضریب تقویت فیلتر یعنی $\left| \frac{E_r}{I_1} \right|$ در $\omega = 0$ برابر یک و در $\omega = 1$ برابر

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ بوده و هنگامیکه $\omega \rightarrow \infty$ ، بطوریکه نواخت بسمت صفر میل میکند. بهمین دلیل مدار

یک فیلتر پائین گذر نامیده میشود. از روی شکل واضح است که امپدانس ورودی فیلتر (در $\omega = 0$) برابر ۱ اهم است زیرا درحقیقت در فرکانس صفر امپدانس خازن‌ها بینهایت بوده (مدار باز) و امپدانس سلف‌ها صفر است (مدار اتصال کوتاه). فرض کنید میخواهیم

در فرکانس ۳ر kHz سطح امپدانسی برابر ۶۰۰ اهم و $\left| \frac{E_r}{I_1} \right|$ را مساوی $\frac{1}{\sqrt{2}}$

داشته باشیم. در اینصورت $r_n = 600$ و $\Omega_n = 2\pi \times 300 \times 10^3 = 2\pi 199 \times 10^4$ و بدست می‌آیند. فیلتر مطلوب خواهد بود. مقادیر اجزاء مطلوب بهسولت از معادله (۶ - ۸) بدست می‌آیند. و پاسخ آن در شکل (۱ - ۸ ب) نشان داده شده است.

با بیان نرمالیزاسیون امپدانس، اولین مطالعه خود را درباره حالت دائمی سینوسی کامل کرده‌ایم. در فصل‌های بعد مرتباً از روش‌های این فصل استفاده کرده و خواص توابع مدار را بررسی خواهیم کرد.

خلاصه

● یک شکل موج سینوسی (با فرکانس زاویه‌ای ω)

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

را میتوان با یک فازور نمایش داد:

$$A \triangleq A_m e^{j\Phi}$$

که مطابق آن:

$$x(t) = \text{Re}(A e^{j\omega t}) = \text{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)})$$

● بالعکس، با داشتن فازور $A = A_m e^{j\Phi}$ و فرکانس زاویه‌ای ω ، میتوان شکل موج سینوسی $x(t)$ را بطور یکتا تعیین نمود. بنابراین:

$$x(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) \\ = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

● برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، اگر تمام فرکانس‌های طبیعی در نیمه بازچپ صفحه فرکانس مختلط واقع باشند، گویند که مدار پایدار مجانبی است.

● برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان پایدار مجانبی، پاسخ حالت دائمی سینوسی با پاسخ مدار به یک ورودی سینوسی وقتی $t \rightarrow \infty$ تعریف میشود. حالت دائمی سینوسی به حالت اولیه مدار بستگی ندارد. پاسخ حالت دائمی سینوسی همان فرکانس سینوسی ورودی را داراست.

● تابع شبکه برای یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی با نسبت «فازور خروجی» به «فازور ورودی» تعریف میشود.

● امپدانس نقطه تحریک Z یک شبکه یک قطبی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان، عبارت از تابع شبکه نظیر برای یک ورودی منبع جریان و پاسخ ولتاژ میباشد و بنابراین مساوی نسبت فازور ولتاژ خروجی به فازور منبع جریان است.

● ادمیتانس نقطه تحریک Y یک شبکه یک قطبی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان، عبارت از تابع شبکه نظیر برای یک ورودی منبع ولتاژ و پاسخ جریان میباشد و بنابراین مساوی نسبت فازور جریان خروجی به فازور منبع ولتاژ است.

● ادمیتانس نقطه تحریک Y یک شبکه یک قطبی N مساوی معکوس امپدانس نقطه تحریک Z شبکه N خواهد بود.

● امپدانس‌ها و ادمیتانس‌های نقطه تحریک برای اجزاء اصلی مدار چنین است:

	$Z(j\omega)$	$Y(j\omega)$
مقاومت	R	G
سلف	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$
خازن	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$

- «امپدانس» یک اتصال «سری» از شبکه‌های یک قطبی، مساوی مجموع امپدانس‌های تک‌تک شبکه‌های یک قطبی می‌باشد. «ادمیتانس» یک اتصال «موازی» از شبکه‌های یک قطبی مساوی مجموع ادمیتانس‌های تک‌تک شبکه‌های یک قطبی است.
- با داشتن تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_0}{I_s}$ ، اگر ورودی شکل موج سینوسی

$$i_s(t) = |I_s| \cos(\omega t + \Phi)$$

باشد آنگاه پاسخ حالت دائمی سینوسی چنین است:

$$v_0(t) = |H(j\omega)| |I_s| \cos[\omega t + \Phi + \angle H(j\omega)]$$

- یعنی، دامنه خروجی از ضرب کردن دامنه ورودی در اندازه تابع شبکه بدست می‌آید و فاز خروجی از اضافه کردن فاز تابع شبکه به فاز ورودی بدست می‌آید.
- برای ورودی و خروجی مشخص متغیرهای اندازه و فاز بر حسب ω را پاسخ فرکانس یک مدار گویند.

- در حالت دائمی سینوسی، اگر ولتاژ قطب و جریان قطب یک شبکه یک قطبی N چنین باشند:

$$v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$$

$$i(t) = \text{Re}(I e^{j\omega t})$$

آنگاه توان «متوسط» تحویل داده شده به شبکه یک قطبی چنین است:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |V| |I| \cos(\angle V - \angle I) dt$$

$$= \frac{1}{T} \text{Re}(VI)$$

$$= \frac{1}{T} |I|^2 \text{Re}[Z(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{T} |V|^2 \text{Re}[Y(j\omega)]$$

که در آن $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ به ترتیب امپدانس و ادمیتانس نقطه تحریک شبکه N می‌باشند.

● در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی، توان «متوسط» کل که توسط چند منبع سینوسی با فرکانس‌های «متفاوت» بآن تحویل داده میشود مساوی مجموع توانهای متوسطی است که هر منبع اگر به تنهایی مدار را تحریک میکرد بآن تحویل میداد.

مسائل

۱- نمایش‌های فازوری فازورهای را که نشان دهنده توابع زمانی با مقدار حقیقی

زیر می‌باشند، تعیین کنید :

$$10 \cos(2t + 30^\circ) + 5 \sin 2t \quad (\text{الف})$$

$$\sin(2t - 90^\circ) + \cos(2t + 15^\circ) \quad (\text{ب})$$

$$\cos t + \cos(t + 30^\circ) + \cos(t + 60^\circ) \quad (\text{پ})$$

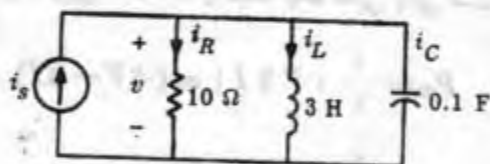
۲- محاسبه فازوری مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (مسئله ۲-۷) در حالت دائمی سینوسی است :

(الف) فازورهای نشان دهنده توابع سینوسی از زمان زیر را محاسبه کنید :

$$v(t), i_C(t), i_R(t), i_L(t), i_1(t), i_2(t) \text{ (یعنی } I_1 \text{ و } I_2 \text{ و } I_L \text{ و } I_R \text{ و } V \text{)}.$$

(ب) - عبارتهایی برای توابع زمانی با مقدار حقیقی $i_R(t)$ ، $i_L(t)$ ، $i_1(t)$ ،

$i_C(t)$ و $v(t)$ بنویسید و آنها را با مقیاس مناسب رسم کنید :



$$i_s(t) = 10 \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

شکل (مسئله ۲-۷)

۳- مقاومت غیرخطی و هارمونیکها گهریم v ولتاژ دوسر یک مقاومت

غیرخطی با مشخصه زیر باشد :

$$v = 0.2 i^2$$

وقتی یک جریان $i = 0.1 \cos 377t$ از داخل مقاومت غیرخطی میگذرد ولتاژ v را حساب کنید (نتیجه را بر حسب مجموع سینوسی‌ها بیان کنید). چه فرکانس‌هایی در خروجی وجود دارند؟

۴ - خازن غیرخطی و هارمونیک‌های فرعی مدار غیرخطی تغییرناپذیر با زمان مولد هارمونیک فرعی (۱) را که در شکل (مسئله ۴ - v) نشان داده شده است در نظر بگیرید. سلف خطی بوده و خازن دارای مشخصه زیر است:

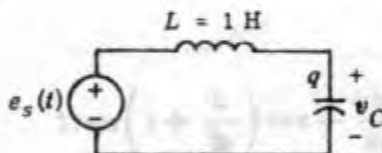
$$v_c = \frac{1}{18} q + \frac{2}{27} q^3$$

(الف) - تحقیق کنید که برای یک ورودی $e_s = \frac{1}{54} \cos t$ ولت، یک پاسخ بصورت

$$q(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$$

«یک سوم» فرکانس منبع صورت میگیرد.

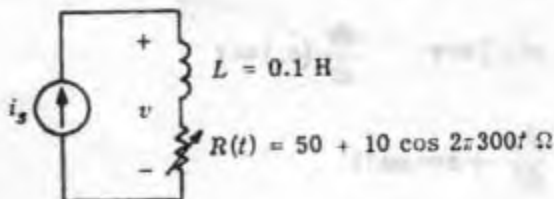
(ب) - برای بار بدست آمده در قسمت (الف) جریان درون منبع را محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۴ - v)

۵ - مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان مدار خطی تغییرپذیر با زمان نشان

داده شده در شکل (مسئله ۵ - v) را در نظر بگیرید. وقتی جریان:



شکل (مسئله ۵ - v)

$$i_s(t) = 10^{-2} \cos \left[2\pi 60 t + \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

آمپر از مدار عبور میکند و تناژ v را معاینه کنید (نتیجه را برحسب مجموع سینوسی‌ها بیان کنید).

۶- فازورها و معادلات دیفرانسیل جوابهای حالت دائمی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 10x = \cos(2t + 45^\circ) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 11 \frac{dx}{dt} + 6x = \sin 2t \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + x = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) \cos 2t \quad (\text{پ})$$

۷- معادلات دیفرانسیل، جواب کامل و جواب حالت دائمی جواب کامل معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. نشان دهید که آیا جواب حالت دائمی برای هر مورد وجود دارد.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) \cos 2t \quad (\text{الف})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = -1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = \sin 2t \quad (\text{ب})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos 2t \quad (\text{پ})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \cos t \quad (ت)$$

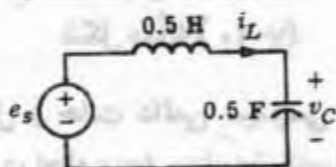
$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + 2x = \cos t \quad (ث)$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = -1$$

۸- فرکانس‌های طبیعی انگاری و پاسخ حالت دائمی مدار نشان داده

شده در شکل (مسأله ۸-۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. ورودی e_s و پاسخ مدار v_C میباشد. با دانستن اینکه $e_s(t) = \sin 2t$ ولت و در لحظه $t=0$ ، حالت مدار $i_L = 2$ آمپر و $v_C = 1$ ولت است. پاسخ کامل را محاسبه کنید.



شکل (مسأله ۸-۷)

۹- امپدانس نقطه تحریک مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۹-۷)

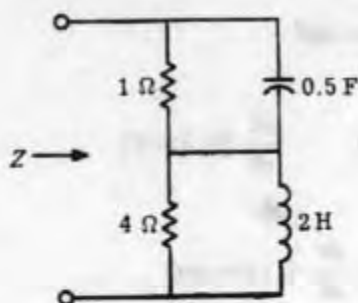
دارای اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان است.

(الف) - امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ را تعیین کنید.

(ب) - مقادیر امپدانس را برای $\omega = 0$ و $\omega = 1$ رادیان بر ثانیه حساب کنید

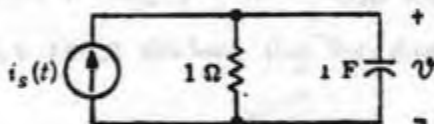
(امپدانس را بر حسب اندازه و زاویه مشخص کنید).

(پ) - با استدلال فیزیکی مقادیر امپدانس در $\omega = 0$ و $\omega = \infty$ را توضیح دهید.



شکل (مسئله ۹-۷)

۱۰- جمع آثار در حالت دائمی برای مدار شکل (مسئله ۱۰-۷)، با دانستن اینکه برای تمام مقادیر t ، $i_s(t) = 1 + 2\cos 2t$ می‌باشد، ولتاژ حالت دائمی v را تعیین کنید.



شکل مسئله (۱۰-۷)

۱۱- پاسخ کامل و حالت دائمی سینوسی گیریم یک ولتاژ سینوسی $e_s(t) = 2\cos 10^6 t$ ولت در لحظه $t=0$ به مدار خطی تغییرناپذیر با زمان LC نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۱-۷) اعمال شود.

الف- با دانستن $i(0) = 1\text{ mA}$ و $v(0) = 0$ ، برای $t \geq 0$ ، $i(t)$ را محاسبه و رسم کنید.

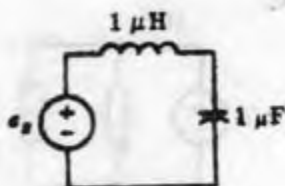
ب- فرض کنید که ماکتزل فاز Φ مولد ولتاژ e_s را داشته باشیم یعنی فرض کنید:

$$e_s(t) = 2\cos(10^6 t + \Phi)$$

مقدار مناسب Φ را اگر وجود داشته باشد چنان پیدا کنید که پاسخ بصورت زیر باشد:

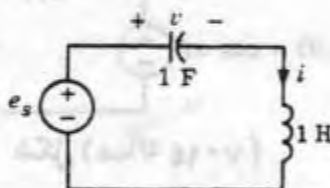
$$i(t) = 10^{-3}\cos 10^6 t + A\sin 10^6 t$$

که در آن A مقدار ثابتی است.



شکل (مسئله ۱۱-۷)

۱۲- مدار بی اتلاف و پاسخ حالت دائمی مدار خطی تغییرناپذیر با زمان LC سری نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۲-۷) را که در آن ورودی سینوسی $e_s(t) = E_m \cos(t + \Phi)$ میباشد در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیلی برای $v(t)$ را تشکیل داده و نشان دهید که ولتاژ v بصورت $v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$ نمایش داده می‌شود که در آن V فازور نمایش دهنده $v(t)$ است توضیح دهید.



شکل (مسئله ۱۲-۷)

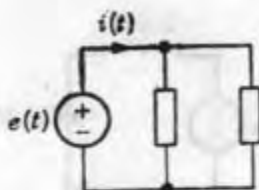
۱۳- پاسخ حالت دائمی سینوسی برای تمام مقادیر t ولتاژ و جریان زیر

داده شده‌اند.

$$e(t) = 0.01 \sin\left(10^3 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i(t) = 0.01 \cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{6}\right)$$

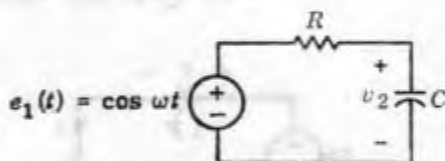
اجزاء مناسب مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۳-۷) را پیدا کرده و مقادیر آنها را برحسب اهم، هانری ویا فاراد مشخص سازید.



شکل (مسئله ۱۳-۷)

۱۴- تابع شبکه و پاسخ حالت دائمی مدار نشان داده شده در شکل (مسئله

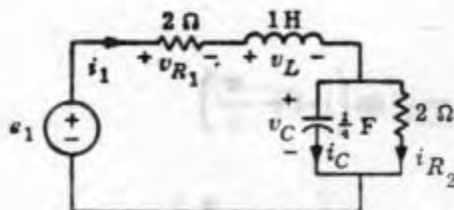
۱۴-۷) خطی و تغییرناپذیر با زمان بوده و در حالت دائمی سینوسی است. فرکانس ω که در آن $v_r(t)$ نسبت به $e_1(t)$ ، 45° عقب میافتد، برحسب مقادیر R و C پیدا کنید. دامنه $v_r(t)$ را در آن فرکانس بدست آورید.



شکل (مسئله ۱۴-۷)

۱۵- دیاگرام فازوری با فرض $v_C(t) = \cos 2t$ ، یک دیاگرام فازوری بسازید

که تمام ولتاژها و جریانهای مشخص شده در شکل (مسئله ۱۵-۷) را نشان دهد. ولتاژ حالت دائمی $e_1(t)$ را پیدا کنید. (آنها بصورت تابعی حقیقی از زمان نشان دهید).

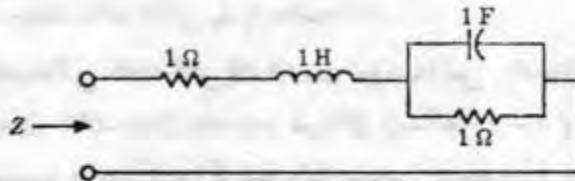


شکل (مسئله ۱۵-۷)

۱۶- اتصال سری امپدانسها امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ مدار نشان

داده شده در شکل (مسئله ۱۶-۷) را تعیین کنید. اگر یک منبع ولتاژ سینوسی

$v_s(t) = 10 \cos 2t$ به یک شبکه یک قطبی اعمال شود، جریان قطب را در حالت دائمی سینوسی تعیین کنید.



شکل (مسئله ۱۶-۷)

۱۷- پاسخ فرکانس اندازه و فاز امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ مدار شکل

(مسئله ۱۶-۷) را بر حسب ω رسم کنید. اگر منبع جریان $i_s(t) = 1 + \cos t + \cos 2t$ به شبکه یک قطبی اعمال شود، ولتاژ حالت دائمی قطب را پیدا کنید.

۱۸- مکان‌های امپدانس و ادمیتانس جزء‌های حقیقی و انکاری امپدانس

$Z(j\omega)$ مدار شکل (مسئله ۱۶-۷) را تعیین کنید. سوپتانس را بصورت تابعی از ω تعیین نموده و رسم کنید. مکان امپدانس و مکان ادمیتانس شبکه یک قطبی را رسم نمایید.

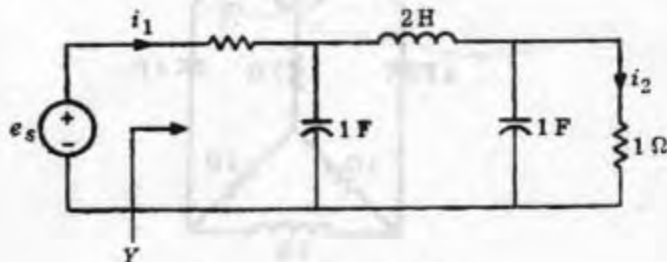
۱۹- مدار نردبانی و توابع شبکه برای مدار نردبانی نشان داده شده در

شکل (مسئله ۱۹-۷):

(الف) - ادمیتانس نقطه تحریک $Y(j\omega)$ را تعیین کنید.

(ب) جریان حالت دائمی i_1 ، ناشی از منبع ولتاژ سینوسی $e_s(t) = 2 \cos 2t$ را

محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۱۹-۷)

(پ) - ادمیتانس انتقالی $Y_{21}(j\omega) = \frac{I_2}{E_2}$ را که در آن I_2 و E_2 به ترتیب

فازورهای نشان دهنده جریان سینوسی i_2 و ولتاژ سینوسی e_2 میباشند تعیین کنید.

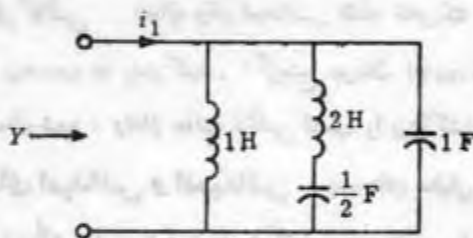
(ت) - جریان حالت دائمی i_2 را محاسبه کنید.

۲۰ - ادمیتانس نقطه تحریک و رسم سوپتانس ادمیتانس نقطه تحریک

$Y(j\omega)$ مدار بدون اتلاف نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۰ - ۷) را تعیین کنید.

سوپتانس را برحسب ω رسم کنید اگر منبع ولتاژ سینوسی $e_s = \cos \omega t$ به شبکه یک قطبی

اعمال شود، درباره جریان i_1 در $\omega = 0, 1, 2, \infty$ چه می‌توانید بگوئید؟

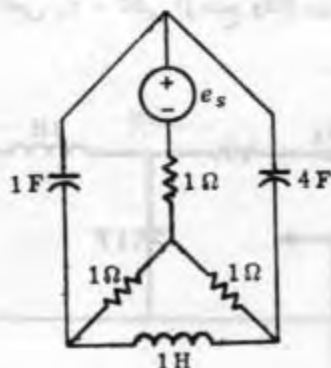


شکل (مسأله ۲۰ - ۷)

۲۱ - مدار دو گان مدار دو گان مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۱ - ۷)

را تعیین کنید.

۲۲ - تجزیه و تحلیل مش برای مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۲ - ۷)



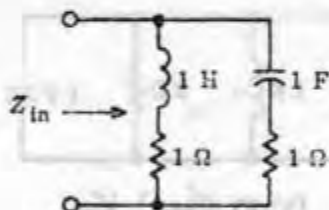
شکل (مسأله ۲۲ - ۷)

جریان حالت دائمی سینوسی در سلف و ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دوسرخازن ۱ فارادی را تعیین کنید. منبع ولتاژ ورودی $e_s(t) = \cos 2t$ می باشد.

۲۳ - تجزیه و تحلیل گره اتصال سری منبع ولتاژ و مقاومت شکل (مسأله ۲۲ - ۷) را به اتصال موازی یک منبع جریان و مقاومت تبدیل کنید. با استفاده از تجزیه و تحلیل گره، جریان حالت دائمی سینوسی در سلف و ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دوسرخازن ۱ فارادی را بدست آورید.

۲۴ - امپدانس نقطه تحریک و توان (الف) - امپدانس ورودی $Z_{in}(j\omega)$ را در فرکانس ω پیدا کنید.

(ب) - اگر ولتاژ ورودی $10 \cos \omega t$ بوده و مدار در حالت دائمی سینوسی باشد، توان لحظه‌ای ورودی به مدار (بصورت تابعی از زمان) چیست؟ (به شکل مسأله ۲۴ - ۷) رجوع شود).



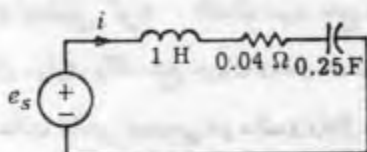
شکل (مسأله ۲۴ - ۷)

۲۵ - فازور، انرژی و توان مدار RLC سری نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۵ - ۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.

الف - با استفاده از روش فازوری پاسخ حالت دائمی سینوسی i را به ورودی $e_s = \sin \omega t$ ولت برای مقادیر 20.2 ، 20.4 ، 20.0 و $\omega = 20.0$ رادیان بر ثانیه حساب کنید. هر نتیجه را بر حسب تابع حقیقی از زمان نشان دهید.

ب - انرژی‌های ذخیره شده در خازن C و در سلف M را بصورت توابعی از زمان برای 20.4 و 20.2 و 20.0 و $\omega = 20.0$ رادیان بر ثانیه محاسبه کنید.

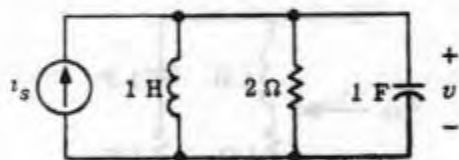
پ. توان متوسط تلف شده در مقاومت را برای 200 ، 202 ، 204 و $\omega = 200$ رادیان بر ثانیه حساب کنید.



شکل (مسئله ۲۵-۷)

۲۶- امپدانس، پاسخ زمانی و جمع آثار اجزاء مدار نشان داده شده در شکل

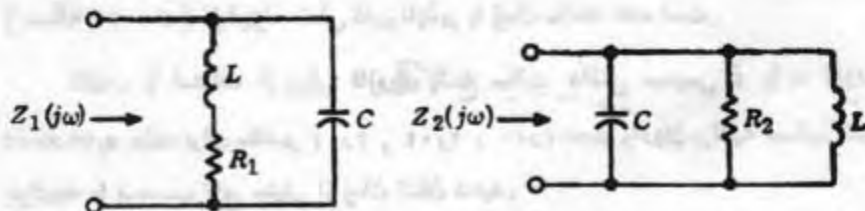
(مسئله ۲۶-۷) خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند. با داشتن $i_s = 2 \sin t + \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ ولتاژ حالت دائمی v را بصورت تابعی از زمان محاسبه و رسم کنید. ایده اصلی روش خود را توضیح دهید.



شکل (مسئله ۲۶-۷)

۲۷- پاسخ‌های فرکانس مدارهای تشدید شبکه‌های یک قطبی نشان داده

شده در شکل (مسئله ۲۷-۷) را در نظر بگیرید. امپدانس‌های $Z_1(j\omega)$ و $Z_2(j\omega)$



$$\begin{aligned} L &= 10^{-3} \text{ H} & R_1 &= 10 \text{ } \Omega \\ C &= 10^{-9} \text{ F} & R_2 &= 10^5 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

شکل (مسئله ۲۷-۷)

را محاسبه کنید. اگر تنها فرکانس‌هایی که در فاصله بین فرکانس تشدید و دو برابر آن قرار دارند مورد نظر باشند، درباره شکل‌های نسبی منحنی‌های $|Z_1(j\omega)|$ و $|Z_2(j\omega)|$ قرار دارند مورد نظر باشند، درباره شکل‌های نسبی منحنی‌های $|Z_1(j\omega)|$ و $|Z_2(j\omega)|$ چه می‌توان گفت؟

۲۸- مدار تشدید، Q و پاسخ فرکانس شبکه یک قطبی نشان داده شده

در شکل (مسئله ۲۸-۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.

(الف) - فرکانس تشدید ω_0 و مقدار Q را محاسبه کنید.

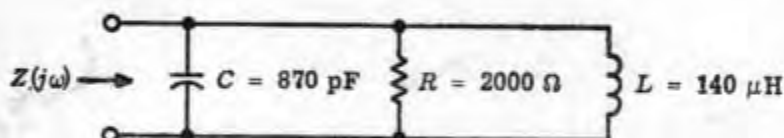
(ب) - امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ را حساب کنید.

(پ) اندازه و زاویه فاز امپدانس را بطور ترمیمی برای این مقادیر $\frac{\omega}{\omega_0}$ محاسبه

کنید: ۰، $1 - \frac{1}{2Q}$ ، 1 ، $1 + \frac{1}{2Q}$ ، 2 و $1 + \frac{1}{2Q}$

(ت) - از نتایج قسمت (پ) $|Z(j\omega)|$ و $\angle Z(j\omega)$ را برحسب $\frac{\omega}{\omega_0}$ رسم

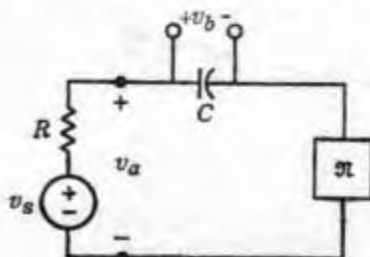
کنید.



شکل (مسئله ۲۸-۷)

۲۹- دیامگرام فازوری و توان مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۲۹-۷)

در حالت دائمی سینوسی کار میکند. مقادیر $v_a = 10 \cos(1000t + 60^\circ)$ و $v_b = 5 \cos(1000t - 30^\circ)$ تعیین شده‌اند. اندازه امپدانس خازن در این فرکانس ۱۰ است



شکل (مسئله ۲۹-۷)

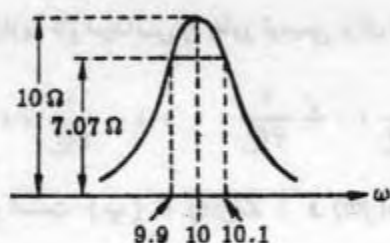
امپدانس $Z(j\omega)$ شبکه یک قطبی N و توان متوسط تحویل داده شده به N را تعیین کنید.

۳۰- پهنای باند مدار تشدید، طرح (الف) در شکل (مسئله ۳۰-۷)

منحنی تشدید $|Z(j\omega)|$ برحسب اهم نسبت به ω برحسب رادیان بر ثانیه [یک مدار RLC موازی نشان داده شده است. R و L و C را پیدا کنید.

(ب) - همین رفتار تشدید در نزدیکی‌های فرکانس مرکزی 20 kHz مورد نظر

است و حداکثر $|Z(j\omega)|$ باید $0.1 \text{ M}\Omega$ باشد. مقادیر جدید R و L و C را بدست آورید.



شکل (مسئله ۳۰-۷)





مدارهای سه فاز

هدف از این فصل نشان دادن آن است که چرا مولدها و خطوط انتقال سه فاز در مدارهای سیستم‌های قدرت به کار برده می‌شوند. دلایل متعددی موجب برتری سیستم‌های سه فاز بر سیستم‌های تک فاز می‌شود. یک دلیل مهم این است که در یک سیستم تک فاز توان لحظه‌ای تحویل داده شده به یک بار ثابت نبوده و نوسان می‌کند؛ در حالی که در یک سیستم سه فاز این نوسانات توان، به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. دلیل مهم دیگر آن است که تولید انرژی الکتریکی به صورت سه فاز به مراتب راحت‌تر از تولید آن به صورت تک فاز است. به این دلایل و به دلایل متعدد دیگر، مدارهای سه فاز متعادل را در این فصل مختصراً مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱- ملاحظات کلی

منظور از این بخش توضیح آن است که چرا اکثر خطوط انتقال انرژی که در جاده‌های بین شهری دیده می‌شود دارای مشخصه‌های زیر است:

الف - ولتاژ بالا

ب - سه فاز (دارای سه سیم)

پ - تغذیه شده به وسیله مولدهای ac (در مقابل مولدهای dc)

کار با مولدهای جریان متناوب نسبت به مولدهای جریان دایم به مراتب راحت‌تر است، زیرا می‌توان به کمک ترانسفورماتورها، ولتاژهای ac را افزایش یا کاهش داد. به علاوه ترانسفورماتورها در فرکانس ۵۰ هرتز بسیار کارآمد بوده، عملاً نگهداری چندانی لازم ندارند. ولتاژ تولید شده در مراکز تولید نیرو در حدود ۱۰ تا ۳۰ کیلوولت است. برای مسافت‌های طولانی، این مقدار توسط ترانسفورماتورها به چندین صد کیلوولت افزایش داده می‌شود و در مراکز مصرف مانند کارخانجات، ادارات و منازل مجدداً پایین آورده می‌شود.

در انتقال نیرو از ولتاژ بالا استفاده می‌شود، زیرا اتلاف توان متوسط در یک خط با امپدانس $R + jX$ برابر $P_L = \frac{1}{\gamma} R I_m^2$ است. توان متوسط انتقال داده شده برابر $P = \frac{1}{\gamma} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I)$ است. بنابراین برای یک توان انتقال داده شده P ، می‌توان توان تلف شده به صورت حرارت در خطوط انتقال را به سادگی با حذف I_m میان دو رابطه بالا به صورت زیر به دست آورد:

$$P_L = \frac{2RP^2}{V_m^2 \cos^2(\phi V - \phi I)} \quad (1-1)$$

بنابراین برای یک خط انتقال مشخص (با R معین) و برای انتقال توان داده شده (با P معین) می توان با انتخاب مقدار بزرگی برای V_m (معمولاً واحد ۷۶۵ کیلوولت) و نزدیک نگهداشتن ضریب توان $\cos(\phi V - \phi I)$ به عدد ۱، اتلاف توان را کاهش داد و بدیهی است هر چه مقدار V_m بالاتر باشد، اتلاف توان کمتر خواهد بود.

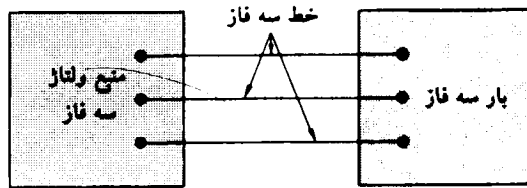
به دو دلیل اصلی، ساختن مولدهای ac در عمل راحت تر از ساختن مولدهای dc است:

- الف - سیم پیچی های ولتاژ بالا و جریان بالا روی استاتور که ثابت است، قرار می گیرند.
- ب - ولتاژ القا شده در استاتور طبعاً نوسانی است و با تغییر شکل دادن قطبها و/یا طراحی سیم پیچی ها می توان ولتاژ القا شده را تقریباً به صورت سینوسی درآورد.
- سرانجام، مدارهای سه فاز به دلایل اقتصادی و مهندسی مورد استفاده قرار می گیرند. از جمله این دلایل عبارتند از:

- الف - تحت بار متعادل، گشتاور روی مولد ثابت است و بنابراین ارتعاشی وجود ندارد.
- ب - ایجاد میدان مغناطیسی دوار با سه فاز راحت تر است و بنابراین امکان ساختن موتورهای القایی ارزان تر فراهم می شود.
- پ - با سیستم سه فاز ac می توان در مقدار آلومینیوم خطوط انتقال صرفه جویی کرد. تحت بارهای متعادل مشاهده خواهیم کرد که به جای شش سیم فقط سه سیم مورد نیاز است.
- این سه مشاهده اخیر در بخشهای بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲- مدارهای سه فاز متعادل

تولید، انتقال، توزیع و مصرف حجم زیادی از انرژی الکتریکی، توسط مدارهای سه فاز صورت می گیرد. تحلیل جامع سیستم های سه فاز خود درس جداگانه ای است و نمی توان امیدوار شد که در یک فصل به طور کامل بیان شود. خوشبختانه، تنها درک رفتار حالت دایمی سینوسی مدارهای سه فاز متعادل برای مهندسی که نمی خواهند متخصص قدرت شوند، کاملاً کفایت می کند. در قسمتهای بعدی بحث، منظور خود را از مدارهای متعادل بیان خواهیم کرد. عجلتاً متذکر می شویم که به دلایلی بحث خود را به مدارهای متعادل محدود کرده ایم. نخست اینکه به دلایل اقتصادی، سیستم های سه فاز چنان طراحی می شوند که در حالت متعادل کار کنند. بدین معنی که تحت شرایط کار طبیعی، این مدارهای سه فاز به مدارهای متعادل بسیار نزدیک هستند و به دست آوردن جوابی که متعادل بودن کامل را فرض می کند قابل توجیه است. دلیل دوم اینکه، می توان مسائلی را که متضمن نوعی شرایط عملکردی نامتعادل است با روشی که به اصطلاح روش مولفه های متقارن گفته می شود حل کرد، که این امر بستگی کاملی به درک عمیق عملکرد سیستم های متعادل دارد. گرچه ما در مورد روش مولفه های متقارن بحث نخواهیم



شکل ۱-۲ مدار سه فاز اساسی.

کرد، درک عملکرد متعادل، به عنوان نقطه آغازین برای روشهای پیشرفته، در تحلیل نوع خاصی از شرایط نامتعادل به کار می‌رود.

ساختار اساسی یک سیستم سه فاز، مرکب از منابع ولتاژی است که از طریق ترانسفورماتور و خطوط انتقال به بارها وصل می‌شوند. می‌توان مسأله را به تحلیل مداری که شامل یک منبع ولتاژ وصل شده به یک بار از طریق یک خط انتقال است، تقلیل داد. حذف ترانسفورماتور به عنوان یک عنصر در سیستم، بدون آنکه درک اساسی محاسبات موجود را به مخاطره بیندازد، بحث را ساده‌تر می‌نماید. مدار اساسی در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. برای آنکه تحلیل مداری از این نوع را آغاز کنیم باید مشخصات یک دسته از ولتاژهای سینوسی سه فاز متعادل را درک کنیم.

۱-۲ ولتاژهای سه فاز متعادل

دسته‌ای از ولتاژهای سه فاز متعادل مشتمل بر سه ولتاژ سینوسی است که دارای فرکانس و اندازه یکسانی بوده، اما دقیقاً اختلاف فازی به مقدار 120° با یکدیگر دارند. در مطالعه مدارهای سه فاز روال عادی این است که به سه فاز، با a ، b و c اشاره کنیم. همچنین فاز a اغلب به عنوان فاز مبنا به کار گرفته می‌شود. به سه ولتاژی که دسته سه فاز را تشکیل می‌دهند ولتاژ فاز a ، ولتاژ فاز b و ولتاژ فاز c گفته می‌شود.

از آنجایی که ولتاژهای فاز با یکدیگر 120° اختلاف فاز دارند، دو رابطه فازی می‌تواند میان ولتاژ فاز a و ولتاژهای فازهای b و c وجود داشته باشد. یک امکان آن است که ولتاژ فاز b به مقدار 120° از ولتاژ فاز a عقب بیفتد که در این صورت ولتاژ فاز c باید به مقدار 120° از ولتاژ فاز a جلو بیفتد. این رابطه فازی را دنباله فازی abc یا دنباله فازی مثبت گویند. تنها امکان نوع دیگر آن است که ولتاژ فاز b از ولتاژ فاز a به اندازه 120° جلو بیفتد که در این صورت ولتاژ فاز c باید به مقدار 120° از ولتاژ فاز a عقب بیفتد. این رابطه فازی را دنباله فازی acb یا دنباله فازی منفی گویند. در نمایش فازوری، دو دسته ممکن از ولتاژهای سه فاز متعادل عبارتند از:

$$V_a = V_m \angle 0^\circ$$

$$V_b = V_m \angle -120^\circ \quad (1-2)$$

$$V_c = V_m \angle +120^\circ$$

و:

$$V_a = V_m \angle 0^\circ$$

$$V_b = V_m \angle +120^\circ \quad (2-2)$$

$$V_c = V_m \angle -120^\circ$$

دنباله فازی ولتاژهای داده شده در معادلات (۱-۲) دنباله فازی abc یا مثبت می باشد. دنباله فازی ولتاژهای داده شده در معادلات (۲-۲) دنباله فازی acb یا منفی است. نمایش دیاگرام فازوری دسته ولتاژهای داده شده در معادلات (۱-۲) و (۲-۲) در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. با حرکت روی شکل در جهت عقربه های ساعت، می توان دنباله فازی را با توجه به ترتیب زیرنویسها تعیین کرد. این حقیقت که یک مدار سه فاز می تواند یکی از دو حالت دنباله فازی را داشته باشد، مشخصه مهمی است که وقتی دو مدار جداگانه، به طور موازی به هم وصل می شوند باید در نظر گرفته شود.

مشخصه مهم دیگر یک دسته ولتاژ سه فاز متعادل این است که مجموع ولتاژها برابر صفر است.

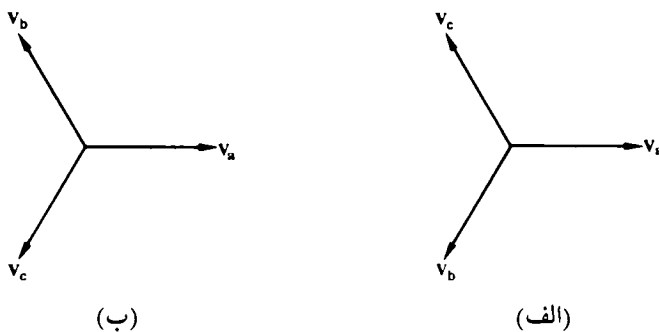
بنابراین با به کار بردن معادلات (۱-۲) یا (۲-۲) داریم:

$$V_a + V_b + V_c = 0 \quad (3-2)$$

به دلیل این که مجموع فازورهای ولتاژها برابر صفر است، مجموع ولتاژهای لحظه ای نیز برابر صفر است. یعنی:

$$v_a + v_b + v_c = 0 \quad (4-2)$$

مشاهده قابل توجه دیگر این است که اگر ما دنباله فازی و یکی از ولتاژهای دسته را بدانیم، تمام ولتاژهای دسته را می دانیم. بنابراین در یک سیستم سه فاز متعادل، می توان بر روی محاسبه ولتاژ (یا جریان) یک فاز تمرکز نمود. زیرا هنگامی که کمیت یک فاز را بدانیم، به طور خودکار کمیت متناظر را در دو فاز دیگر می دانیم.



شکل ۲-۲. دیاگرام فازوری یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل: (الف) دنباله abc

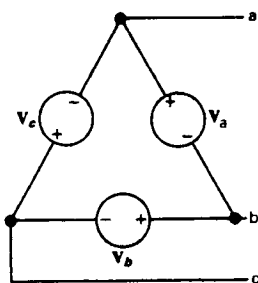
یا دنباله مثبت؛ (ب) دنباله acb یا دنباله منفی.

۲-۲ منابع ولتاژ سه فاز

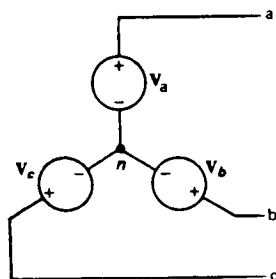
منابع ولتاژ سه فاز مرکب از مولدهایی است که سیم پیچی جداگانه توزیع شده بر روی اطراف استاتور دارند. هر سیم پیچ یک فاز مولد را تشکیل می دهد. روتور مولد، یک آهن ربای الکتریکی است که با سرعت همزمان توسط یک گرداننده اصلی مانند توربین بخار یا گازی چرخانده می شود. وقتی که آهن ربای الکتریکی ضمن دوران از مقابل سر سیم پیچ می گذرد، یک ولتاژ سینوسی در هر سیم پیچ القا می شود. سیم پیچ های فاز چنان طراحی شده اند که ولتاژ سینوسی القا شده در آنها از لحاظ اندازه یکسان بوده و دقیقاً اختلاف فازی به مقدار 120° دارند. چون سیم پیچ های فاز در مقابل آهن ربای الکتریکی دوار ساکن هستند، فرکانس ولتاژ القا شده در هر سیم پیچ یکسان است.

معمولاً امپدانس هر سیم پیچ فاز در یک مولد سه فاز، در مقایسه با سایر امپدانس های موجود در مدار بسیار کوچک است. از این رو هر سیم پیچ فاز را می توان در یک مدار الکتریکی به طور تقریبی به صورت یک منبع ولتاژ سینوسی ایده آل، مدل سازی نمود. برای تشکیل منبع سه فاز دو راه برای به هم پیوستن سیم پیچ های فاز جداگانه وجود دارد. سیم پیچها را می توان یا به صورت اتصال ستاره یا وی (Y) یا به صورت اتصال مثلث یا دلتا (Δ) به هم وصل کرد. اتصالات Y و Δ در شکل (۲-۳) نشان داده شده است، که در آن برای مدل سازی سیم پیچ های فاز یک مولد سه فاز، از منابع ولتاژ ایده آل استفاده شده است. گره مشترک در اتصال منابع به صورت Y در شکل (۲-۳ الف) با n علامت گذاری شده است و به عنوان سر خنثی منبع گفته می شود. برای اتصالات خارجی ممکن است سر خنثی در دسترس باشد یا نباشد.

اگر امپدانس هر سیم پیچ فاز قابل صرف نظر نباشد، منبع سه فاز با اضافه کردن امپدانس سیم پیچ به طور سری با منابع ولتاژ سینوسی ایده آل، مدل سازی می شود. از آنجایی که تمام سیم پیچ های ماشین ساختمان یکسانی دارند، فرض می کنیم که امپدانس سیم پیچ ها یکسان باشد. امپدانس سیم پیچ مولدهای سه فاز القایی است. مدل یک منبع سه فاز شامل امپدانس های سیم پیچ در شکل (۲-۴) نشان داده شده است که در آن R_w مقاومت سیم پیچ و X_w راکتانس القایی سیم پیچ است.



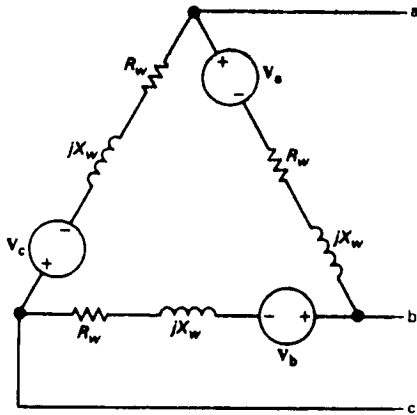
(ب)



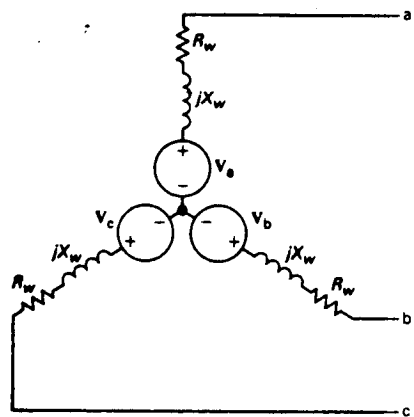
(الف)

شکل ۲-۳ دو اتصال اصلی منابع ولتاژ سه فاز ایده آل: (الف) منبع وصل شده به صورت Y؛

(ب) منبع وصل شده به صورت Δ .



(ب)



(الف)

شکل ۲-۴ مدلی از یک منبع سه فاز با امپدانس‌های سیم‌پیچی: (الف) منبع وصل

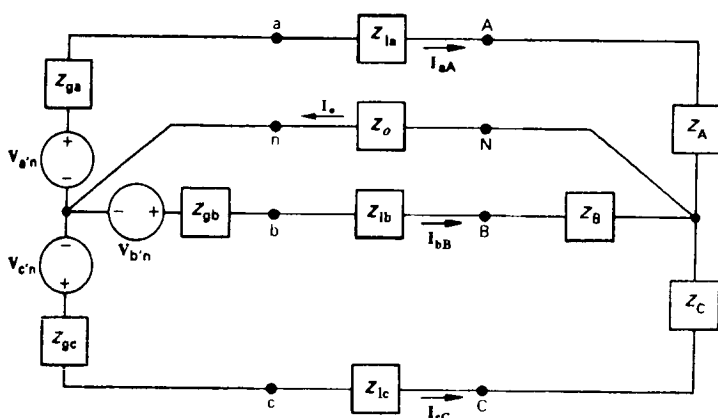
شده به صورت Y؛ (ب) منبع وصل شده به صورت Δ .

به علت اینکه یک منبع ولتاژ سه فاز می‌تواند به صورت Y یا به صورت Δ وصل شده باشد و بار سه فاز نیز می‌تواند به صورت Y یا Δ وصل شده باشد، مدار اساسی شکل (۲-۱) می‌تواند چهار صورت متفاوت به خود بگیرد. چهار ترتیب ممکن عبارتند از: (۱) منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Y؛ (۲) منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ ؛ (۳) منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Y؛ (۴) منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Δ .

ما تحلیل مدارهای سه فاز را به صورت اول آغاز می‌کنیم. پس از تحلیل مدار Y-Y، نشان خواهیم داد که چگونه در مدارهای متعادل، صورت‌های دیگر را می‌توان به مدار معادل به صورت Y-Y تبدیل کرد. به عبارت دیگر، تحلیل مدار Y-Y کلید حل تمام صورت‌های سه فاز متعادل دیگر است.

۲-۲ تحلیل مدار Y-Y

تحلیل خود را از مدار Y-Y با فرض نامتعادل بودن آن آغاز می‌کنیم! این کار را عمداً انجام می‌دهیم تا نشان دهیم که منظور ما از متعادل بودن مدار سه فاز چیست و نتایج متعادل بودن در تحلیل مدار چگونه است. مدار کلی Y-Y در شکل (۲-۵) نشان داده شده است که در آنجا سیم چهارمی هم‌گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می‌کند. سیم چهارم تنها در ترکیب Y-Y امکان‌پذیر است. همچنین برای سهولت رسم دیاگرام‌ها، اتصالات Y را به صورت T‌های خوابیده نشان داده‌ایم. در شکل (۲-۵)، Z_{ga} ، Z_{gb} و Z_{gc} نشان دهنده امپدانس‌های درونی متناظر با هر فاز سیم پیچی منابع ولتاژ هستند. Z_{1a} ، Z_{1b}



شکل ۵-۲ یک سیستم سه فاز Y-Y.

و Z_{lc} نشان دهنده امپدانس هر سیم خط فازی است که منبع را به بار وصل می‌کند. Z_o امپدانس سیم خنثی است که گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می‌کند. Z_A ، Z_B و Z_C نشان دهنده امپدانس هر فاز بار هستند.

مدار شکل (۵-۲) را می‌توان با یک معادله ولتاژ گره تنها توصیف کرد. با به کار بردن گره خنثی منبع به عنوان گره مبنا و با فرض V_N به عنوان ولتاژ گره میان گره‌های N و n معادله ولتاژ گره را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{V_N}{Z_o} + \frac{V_N - V_{a'n}}{Z_A + Z_{la} + Z_{ga}} + \frac{V_N - V_{b'n}}{Z_B + Z_{lb} + Z_{gb}} + \frac{V_N - V_{c'n}}{Z_C + Z_{lc} + Z_{gc}} = 0 \quad (5-2)$$

قبل از تحلیل بیشتر معادله (۵-۲)، اندکی مکت کرده و ملاحظه کنید که روشهای تحلیل مدار بحث شده در فصلهای قبل مستقیماً به مدارهای سه فاز قابل اعمال هستند. از این رو معرفی روشهای تحلیلی جدید برای تحلیل مدارهای سه فاز لازم نیست. لیکن به طوری که در بقیه این فصل خواهیم دید، اگر یک مدار سه فاز، متعادل باشد، می‌توان بعضی روشهای تحلیلی میان‌بر مهم برای بررسی رفتار سیستم ارائه داد. مدار شکل (۵-۲) یک مدار سه فاز متعادل است، اگر تمام شرایط زیر برقرار باشد:

۱- $V_{a'n}$ ، $V_{b'n}$ و $V_{c'n}$ یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل دهند.

۲- $Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc}$

۳- $Z_{la} = Z_{lb} = Z_{lc}$

۴- $Z_A = Z_B = Z_C$

هیچ محدودیتی بر روی امپدانس سیم خنثی (Z_o) وجود ندارد. مقدار آن هیچ تاثیری بر روی متعادل بودن یا نامتعادل بودن سیستم ندارد.

اگر سیستم متعادل باشد معادله (۵-۲) بیان می‌کند که V_N باید برابر صفر باشد. برای نشان دادن این مطلب فرض کنید:

$$Z_\phi = Z_A + Z_{1a} + Z_{ga} \quad (۶-۲)$$

در این صورت معادله (۵-۲) را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$V_N \left(\frac{1}{Z_\phi} + \frac{3}{Z_\phi} \right) = \frac{V_{a'n} + V_{b'n} + V_{c'n}}{Z_\phi} \quad (۷-۲)$$

سمت راست معادله (۷-۲) برابر صفر است زیرا بنابه فرض، صورت آن یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل بوده و Z_ϕ برابر صفر نمی‌باشد. تنها مقدار V_N که در معادله (۷-۲) صدق می‌کند، صفر است. از این‌رو برای یک مدار سه فاز متعادل داریم:

$$V_N = 0 \quad (۸-۲)$$

معادله (۸-۲) یک نتیجه فوق‌العاده مهم است. اگر V_N صفر باشد، هیچ اختلاف پتانسیلی میان گره خنثی منبع (n) و گره خنثی بار (N) وجود ندارد. از این‌رو جریان گذرنده از سیم خنثی برابر صفر است. بنابراین می‌توان سیم خنثی را از یک مدار $Y - Y$ متعادل حذف نمود ($I_n = 0$) یا اینکه آن را با یک سیم اتصال کوتاه کامل میان گره‌های n و N جایگزین کرد ($V_N = 0$). در مدل‌سازی مدارهای سه فاز متعادل هر دو روش را به راحتی به کار می‌بریم.

اکنون توجه خود را به این مطلب معطوف می‌کنیم که شرط متعادل بودن مدار چه تأثیری بر روی سه جریان خط می‌گذارد. مستقیماً از شکل (۵-۲) نتیجه می‌شود که اگر سیستم متعادل باشد، سه جریان خط چنین خواهند بود:

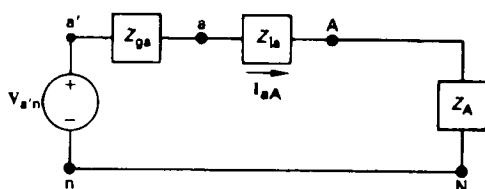
$$I_{aA} = \frac{V_{a'n} - V_N}{Z_A + Z_{1a} + Z_{ga}} = \frac{V_{a'n}}{Z_\phi} \quad (۹-۲)$$

$$I_{bB} = \frac{V_{b'n} - V_N}{Z_B + Z_{1b} + Z_{gb}} = \frac{V_{b'n}}{Z_\phi} \quad (۱۰-۲)$$

$$I_{cC} = \frac{V_{c'n} - V_N}{Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}} = \frac{V_{c'n}}{Z_\phi} \quad (۱۱-۲)$$

از این معادلات نتیجه می‌گیریم که در یک سیستم سه فاز متعادل، سه جریان خط، یک دسته جریانهای سه فاز متعادل تشکیل می‌دهند. یعنی جریان در هر خط از لحاظ دامنه و فرکانس یکسان بوده و دقیقاً به اندازه 120° با دو جریان دو خط دیگر اختلاف فاز خواهد داشت. بنابراین اگر جریان I_{aA} را محاسبه کنیم، می‌توانیم جریانهای خط I_{bB} و I_{cC} را بدون محاسبات اضافی بنویسیم. با این بیان اظهار می‌داریم که دنباله فاز نیز معلوم است.

با به کار بردن معادله (۹-۲) می‌توان مدار معادل تک فاز مدار سه فاز متعادل $Y - Y$ را رسم کرد. از معادله (۹-۲) نتیجه می‌شود که جریان در فاز a به سادگی برابر ولتاژ ایجاد شده در فاز a سیم پیچ



شکل ۶-۲ مدار معادل تک فاز.

مولد تقسیم بر امپدانس کل فاز a مدار است. از این رو معادله (۹-۲)، مدار ساده شکل (۶-۲) را توصیف می‌کند که در آن سیم خنثی توسط یک مدار اتصال کوتاه کامل جایگزین شده است. تذکر یک نکته احتیاطی در اینجا لازم است. جریان در سیم خنثی در شکل (۶-۲) برابر جریان در سیم خنثی در مدار سه فاز متعادل نیست. جریان در سیم خنثی چنین است:

$$I_0 = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} \quad (۱۲-۲)$$

در حالی که جریان در سیم خنثی در شکل (۶-۲) برابر I_{aA} است. از این رو مدار شکل (۶-۲) مقدار درست جریان خط را به دست می‌دهد، لیکن تنها مولفه فاز a جریان سیم خنثی را مشخص می‌کند. هر موقع که مدار معادل تک فاز شکل (۶-۲) قابل اعمال باشد، جریانهای خط، یک دسته سه فاز متعادل تشکیل داده، سمت راست معادله (۱۲-۲) مجموعی برابر صفر دارد.

وقتی که ما جریانهای خط در شکل (۵-۲) را بدانیم، محاسبه هر ولتاژ مورد نظر در آن شکل کار نسبتاً ساده‌ای است. کمیت‌های مورد نظر ولتاژ خط نسبت به خط دیگر و ولتاژ خط نسبت به خنثی می‌باشند. ما این روابط را در سرهای بار به دست خواهیم آورد؛ اما نتایج به دست آمده، در سرهای منبع نیز قابل اعمال خواهند بود. ولتاژ خط به خط در سرهای بار برحسب ولتاژ خط به خنثی در سرهای بار چنین است:

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN} \quad (۱۳-۲)$$

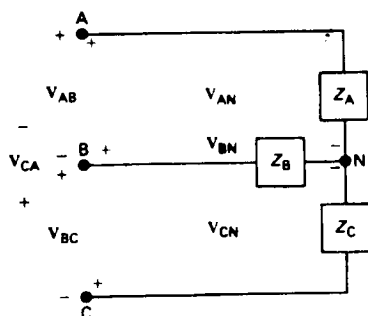
$$V_{BC} = V_{BN} - V_{CN} \quad (۱۴-۲)$$

و:

$$V_{CA} = V_{CN} - V_{AN} \quad (۱۵-۲)$$

طرز نمایش دو زیرنویس در معادلات ولتاژ نشان دهنده افت ولتاژ از زیرنویس اول تا زیرنویس دوم می‌باشد. روابط داده شده در معادلات (۱۳-۲) تا (۱۵-۲) در شکل (۷-۲) نشان داده شده است. از آنجایی که ما علاقه‌مند به حالت متعادل هستیم، سیم خنثی را از شکل حذف کرده‌ایم.

برای نشان دادن ارتباط میان ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی، یک دنباله فازی مثبت یا دنباله abc را فرض می‌کنیم. به طور دلخواه، ولتاژ خط به خنثی فاز a را به عنوان مرجع انتخاب می‌کنیم. از این رو:



شکل ۷-۲ ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی.

$$V_{AN} = V_{\phi} \angle 0^{\circ} \quad (۱۶-۲)$$

$$V_{BN} = V_{\phi} \angle -120^{\circ} \quad (۱۷-۲)$$

و:

$$V_{CN} = V_{\phi} \angle +120^{\circ} \quad (۱۸-۲)$$

که در آن V_{ϕ} نشان دهنده اندازه ولتاژ خط به خطی است. با جایگزینی معادلات (۱۶-۲) تا (۱۸-۲) به ترتیب در معادلات (۱۳-۲) تا (۱۵-۲) به دست می آوریم:

$$V_{AB} = V_{\phi} \angle 0^{\circ} - V_{\phi} \angle -120^{\circ} = \sqrt{3} V_{\phi} \angle 30^{\circ} \quad (۱۹-۲)$$

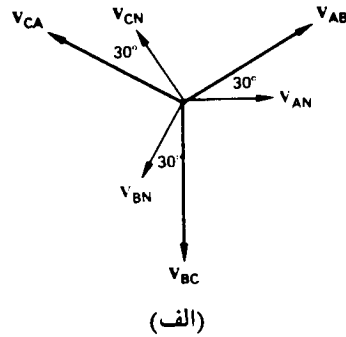
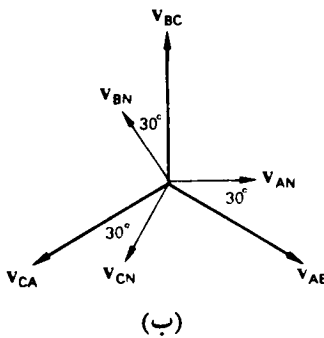
$$V_{BC} = V_{\phi} \angle -120^{\circ} - V_{\phi} \angle 120^{\circ} = \sqrt{3} V_{\phi} \angle -90^{\circ} \quad (۲۰-۲)$$

و:

$$V_{CA} = V_{\phi} \angle 120^{\circ} - V_{\phi} \angle 0^{\circ} = \sqrt{3} V_{\phi} \angle 150^{\circ} \quad (۲۱-۲)$$

معادلات (۱۹-۲) تا (۲۱-۲) نشان می دهند که: (۱) اندازه ولتاژ خط به خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ خط به خنثی است. (۲) ولتاژهای خط به خط یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل می دهند. (۳) دسته ولتاژهای خط به خط از دسته ولتاژهای خط به خنثی 30° جلو می افتند. این موضوع را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم که نشان دهد برای یک دنباله فازی منفی یا دنباله acb تنها تغییر این است که دسته ولتاژهای خط به خط از دسته ولتاژهای خط به خنثی به مقدار 30° عقب می افتند. در دیگرام های فازوری شکل (۸-۲) این روابط خلاصه شده اند. بنابراین در یک سیستم متعادل اگر ولتاژ خط به خنثی در نقطه ای از مدار معلوم باشد، ولتاژ خط به خط نیز در همان نقطه مدار معلوم است و برعکس.

قبل از تشریح محاسبات سه فاز متعادل با یک مثال عددی، بعضی توضیحات اضافی درباره اصطلاحات را بیان می کنیم. در یک سیستم $Y-Y$ ولتاژ خط به خنثی ولتاژ فاز نیز خوانده می شود و برای اختصار ولتاژ خط به خط ولتاژ خط نیز خوانده خواهد شد. جریان فاز به صورت جریان در هر فاز بار، یا در سرهای منبع مدار، جریان در هر فاز مولد تعریف می شود. جریان خط به صورت جریان در هر



شکل ۲-۸ دیاگرام فازوری نشان دهنده ارتباط میان ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی

در یک سیستم متعادل: (الف) دنباله abc، (ب) دنباله acb.

فاز خط تعریف می‌شود. برای ساختار $Y - Y$ جریان فاز و جریان خط یکسان است. از آنجایی که سیستم‌های سه فاز برای کار کردن با توانهای الکتریکی با حجم بالا طراحی می‌شوند، تمام مشخصات ولتاژها و جریانها و محاسبات آنها برحسب مقادیر rms بیان می‌شود. بنابراین هنگامی که یک خط انتقال سه فاز به صورت 345 kV بیان می‌شود، مقدار نامی rms ولتاژ خط به خط برابر 345000 ولت است. در این فصل تمام ولتاژها و جریانها برحسب rms بیان می‌شوند. بالاخره حرف یونانی ϕ برای مشخص کردن کمیت هر فاز به مقدار زیادی در نوشته‌ها به کار می‌رود. بنابراین V_ϕ ، I_ϕ ، Z_ϕ ، P_ϕ و Q_ϕ به ترتیب به صورت ولتاژ فاز، جریان فاز، امپدانس فاز، توان فاز و توان راکتیو فاز تعبیر می‌شوند.

مثال ۱ نشان می‌دهد که برای حل مدار سه فاز $Y - Y$ متعادل، چگونه باید مطالب بیان شده تاکنون را به کار برد.

مثال ۱ یک مولد سه فاز با دنباله مثبت وصل شده به صورت Y دارای امپدانس $0.5 + j0.2$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی هر فاز مولد برابر 120 ولت است. این مولد یک بار سه فاز متعادل وصل شده به صورت Y را تغذیه می‌کند که دارای امپدانس $28 + j39$ اهم بر فاز است. امپدانس خطی که مولد را به بار وصل می‌کند برابر $1.5 + j0.8$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی فاز a مولد به عنوان فاز مبنا مشخص می‌شود.

الف - مدار معادل تک فاز این سیستم سه فاز را رسم کنید.

ب - سه جریان خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

پ - سه ولتاژ خط به خنثی را در سرهای بار حساب کنید: یعنی V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN} .

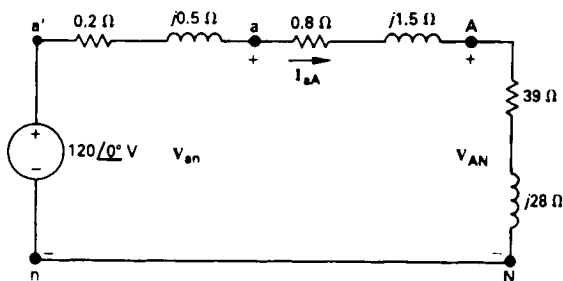
ت - سه ولتاژ خط V_{AB} ، V_{BC} و V_{CA} را در سرهای بار حساب کنید.

ث - ولتاژهای خط به خنثی را در سرهای مولد حساب کنید: یعنی V_{an} ، V_{bn} و V_{cn} .

ج - ولتاژهای خط V_{ab} ، V_{bc} و V_{ca} را در سرهای مولد حساب کنید.

چ - قسمتهای (الف) تا (ج) را با فرض دنباله فاز منفی تکرار کنید.

حل الف - مدار معادل تک فاز در شکل (۹-۲) نشان داده شده است.



شکل ۹-۲ مدار معادل تک فاز برای مثال ۱.

ب - جریان خط فاز a چنین است:

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0.2 + 0.8 + 39) + j(0.5 + 1.5 + 28)}$$

$$= \frac{120 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 2.4 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

برای یک دنباله فازی مثبت داریم:

$$I_{bB} = 2.4 \angle -156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 2.4 \angle 83.13^\circ \text{ A}$$

پ - ولتاژ خط به خنثی در سر A بار چنین است:

$$V_{AN} = (39 + j28)(2.4 \angle -36.87^\circ)$$

$$= 115.22 \angle -1.19^\circ \text{ V}$$

برای یک دنباله فازی مثبت داریم:

$$V_{BN} = 115.22 \angle -121.19^\circ \text{ V}$$

$$V_{CN} = 115.22 \angle +118.81^\circ \text{ V}$$

ت - برای یک دنباله فازی مثبت، ولتاژهای خط به خط از ولتاژهای خط به خنثی 30° جلو می افتد.

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 V_{AB} &= (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{AN} \\
 &= 199,58 \angle 28,81^\circ \text{ V} \\
 V_{BC} &= 199,58 \angle -91,19^\circ \text{ V} \\
 V_{CA} &= 199,58 \angle 148,81^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

ث - ولتاژ خط به خنثی در سر a منبع چنین است:

$$\begin{aligned}
 V_{an} &= 120 - (0,2 + j0,5)(2,4 \angle -36,87^\circ) \\
 &= 120 - 1,29 \angle 31,33^\circ \\
 &= 118,90 - j0,67 \\
 &= 118,90 \angle -0,32^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

برای دنباله فازی مثبت داریم:

$$\begin{aligned}
 V_{bn} &= 118,90 \angle -120,32^\circ \\
 V_{cn} &= 118,90 \angle 119,68^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

ج - ولتاژ خط به خط در سرهای منبع چنین است:

$$\begin{aligned}
 V_{ab} &= (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{an} \\
 &= 205,94 \angle 29,68^\circ \text{ V} \\
 V_{bc} &= 205,94 \angle -90,32^\circ \text{ V} \\
 V_{ca} &= 205,94 \angle 149,68^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

چ - تغییر دنباله فازی تاثیری بر روی مدار معادل تک فاز ندارد. سه جریان خط چنین هستند:

$$\begin{aligned}
 I_{aA} &= 2,4 \angle -36,87^\circ \text{ A} \\
 I_{bB} &= 2,4 \angle 83,13^\circ \text{ A} \\
 I_{cC} &= 2,4 \angle -156,87^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

ولتاژهای خط به خنثی در سرهای بار عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 V_{AN} &= 115,22 \angle -1,19^\circ \text{ V} \\
 V_{BN} &= 115,22 \angle 118,81^\circ \text{ V} \\
 V_{CN} &= 115,22 \angle -121,19^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

برای دنباله فازی منفی، ولتاژهای خط به خط 30° از ولتاژهای خط به خنثی عقب می افتد:

$$V_{AB} = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) V_{AN}$$

$$= 199,58 \angle -31,19^\circ V$$

$$V_{BC} = 199,58 \angle 88,81^\circ V$$

$$V_{CA} = 199,58 \angle -151,19^\circ V$$

ولتاژهای خط به خنثی در سرهای مولد عبارتند از:

$$V_{an} = 118,90 \angle -0,32^\circ V$$

$$V_{bn} = 118,90 \angle 119,68^\circ V$$

$$V_{cn} = 118,90 \angle -120,32^\circ V$$

ولتاژهای خط به خط در سرهای مولد عبارتند از:

$$V_{ab} = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) V_{an}$$

$$= 205,94 \angle -30,32^\circ V$$

$$V_{bc} = 205,94 \angle 89,68^\circ V$$

$$V_{ca} = 205,94 \angle -150,32^\circ V$$

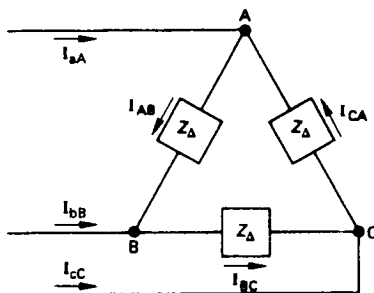
در مثال ۱ توجه کنید که وقتی کمیت فاز a محاسبه شد، مقادیر متناظر فازهای b و c را می‌توان به سادگی با انتقال فاز a به مقدار 120° به دست آورد. برای دنباله فازی مثبت، فاز b، 120° از فاز a عقب می‌افتد در حالی که فاز c، 120° از فاز a جلو می‌افتد. برای یک دنباله فازی منفی، فاز b از فاز a به مقدار 120° جلو می‌افتد و فاز c از فاز a به مقدار 120° عقب می‌افتد. بنابراین محاسبه ولتاژ خط به خط، با داشتن ولتاژ خط به خنثی بسیار ساده است.

۴-۲ تحلیل مدار Y-Δ

اگر در یک مدار سه فاز بار به صورت دلتا وصل شده باشد، می‌توان با به کار بردن تبدیل دلتا به وای (مثلاً به ستاره) آن را به وای تبدیل کرد. وقتی که بار متعادل باشد، امپدانس هر بازوی اتصال وای برابر یک سوم امپدانس هر بازوی اتصال دلتا است. بنابراین:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \quad (22-2)$$

وقتی که بار Δ توسط بار معادل Y جایگزین شود، مدار سه فاز را می‌توان با یک مدار معادل تک فاز شکل (۶-۲) مدل سازی کرد.



شکل ۲-۱۰ مدار به کار رفته برای برقراری روابط میان جریانهای

خط و جریانهای فاز در یک بار متعادل Δ .

پس از آنکه مدار متعادل تک فاز را برای محاسبه جریانهای خط به کار بردیم، می توان جریان هر بازوی بار Δ اصلی را به سادگی از تقسیم جریان خط بر $\sqrt{3}$ و انتقال آن به جلو به میزان 30° به دست آورد. این روابط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در اتصال Δ را می توان با به کار بردن شکل (۲-۱۰) به دست آورد.

وقتی که باری یا منبعی به صورت دلتا وصل شود، جریان در هر بازوی دلتا برابر جریان فاز و ولتاژ میان دوسر هر بازو، ولتاژ فاز است. از شکل (۲-۱۰) می بینیم که در یک اتصال Δ ولتاژ فاز دقیقاً مساوی ولتاژ خط است.

برای نشان دادن ارتباط میان جریان فاز و جریان خط، یک دنباله مثبت فرض کرده و فرض می کنیم I_ϕ نشان دهنده اندازه جریان فاز باشد. در این صورت:

$$I_{AB} = I_\phi \angle 0^\circ \quad (2-23)$$

$$I_{BC} = I_\phi \angle -120^\circ \quad (2-24)$$

$$I_{CA} = I_\phi \angle +120^\circ \quad (2-25)$$

در نوشتن این معادلات ما به دلخواه I_{AB} را به صورت فاز مبنا انتخاب کردیم.

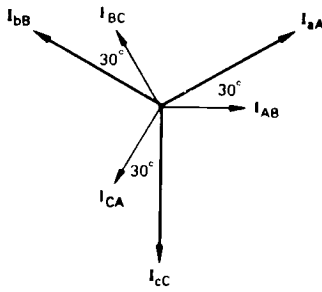
می توان با اعمال مستقیم قانون کیرشف جریان خط را برحسب جریان فاز نوشت. در این صورت

داریم:

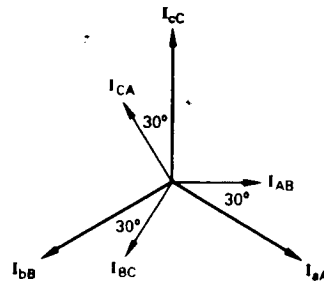
$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_{AB} - I_{CA} = I_\phi \angle 0^\circ - I_\phi \angle 120^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -30^\circ \end{aligned} \quad (2-26)$$

$$\begin{aligned} I_{bB} &= I_{BC} - I_{AB} = I_\phi \angle -120^\circ - I_\phi \angle 0^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -150^\circ \end{aligned} \quad (2-27)$$

$$\begin{aligned} I_{cC} &= I_{CA} - I_{BC} = I_\phi \angle 120^\circ - I_\phi \angle -120^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle 90^\circ \end{aligned} \quad (2-28)$$



(ب)



(الف)

شکل ۱۱-۲ دیاگرام فازوری نشان دهنده ارتباط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در یک بار وصل شده به صورت Δ : (الف) دنباله فازی مثبت؛ (ب) دنباله فازی منفی.

مقایسه معادلات (۲-۲۶) تا (۲-۲۸) با معادلات (۲-۲۳) تا (۲-۲۵) نشان می دهد که اندازه جریان خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان فاز بوده و دسته جریانهای خط 30° از دسته جریانهای فاز عقب می افتند. تایید این مطلب را به عهده خواننده می گذاریم که برای یک دنباله فازی منفی، جریان خط $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز بوده و 30° از آن جلو می افتد. ارتباط میان جریانهای خط و جریانهای فاز یک بار وصل شده Δ در شکل (۱۱-۲) خلاصه شده است.

مثال ۲ محاسبات مربوط به تحلیل یک مدار سه فاز متعادل شامل منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ را نشان می دهد.

مثال ۲ منبع وصل شده به صورت Y در مثال ۱، یک بار وصل شده به صورت Δ را از طریق یک خط توزیع با امپدانس $0.9 + j0.3$ اهم بر فاز تغذیه می کند. امپدانس بار برابر $118.5 + j85.8$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی فاز a مولد را به عنوان فاز مبنا به کار ببرید.

الف - مدار معادل تک فاز سیستم سه فاز را رسم کنید.

ب - جریانهای خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

پ - ولتاژهای فاز را در سرهای بار محاسبه کنید.

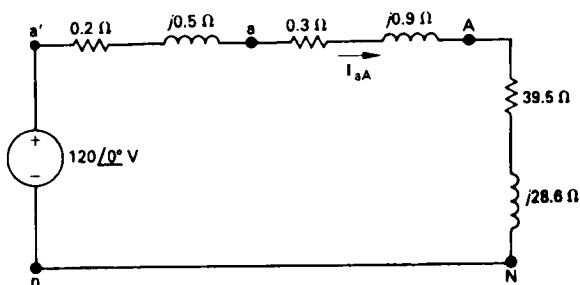
ت - جریانهای فاز بار را محاسبه کنید.

ث - ولتاژهای خط را در سرهای منبع محاسبه کنید.

حل الف - مدار معادل تک فاز در شکل (۱۲-۲) نشان داده شده است. امپدانس بار اتصال معادل Y چنین است:

$$\left(\frac{1}{3}\right)(118.5 + j85.8) = 39.5 + j28.6 \, \Omega/\phi$$

ب - جریان خط فاز a چنین است:



شکل ۱۲-۲ مدار معادل تک فاز مثال ۲.

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0.2 + 0.3 + 39.5) + j(0.5 + 0.9 + 28.6)} = \frac{120 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 2.4 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

بنابراین مستقیماً نتیجه می‌شود:

$$I_{bB} = 2.4 \angle -156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 2.4 \angle 83.13^\circ \text{ A}$$

ب - چون بار به صورت Δ وصل شده است، ولتاژهای فاز همان ولتاژهای خط است. برای محاسبه ولتاژ خط ابتدا V_{AN} را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{AN} = (39.5 + j28.6)(2.4 \angle -36.87^\circ) = 117.04 \angle -0.96^\circ \text{ V}$$

چون دنباله فازی مثبت است، ولتاژ خط V_{AB} چنین است:

$$V_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ V_{AN} = 202.72 \angle 29.04^\circ \text{ V}$$

بنابراین:

$$V_{BC} = 202.72 \angle -90.96^\circ \text{ V}$$

$$V_{CA} = 202.72 \angle 149.04^\circ \text{ V}$$

ت - جریانهای فاز بار را می‌توان مستقیماً از جریانهای خط محاسبه کرد:

$$I_{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ\right) I_{aA} = 1.39 \angle -6.87^\circ \text{ A}$$

وقتی که I_{AB} را بدانیم، جریانهای فاز بار دیگر را می‌دانیم:

$$I_{BC} = 1.39 \angle -126.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = 1.39 \angle 113.13^\circ \text{ A}$$

توجه کنید که می‌توان محاسبه I_{AB} را با به کار بردن مقادیر محاسبه شده قبلی V_{AB} و امپدانس بار وصل شده Δ بررسی کرد. یعنی:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\phi} = \frac{202.72 \angle 29.04^\circ}{118.5 + j85.8} = 1.39 \angle -6.87^\circ \text{ A}$$

(روشهای محاسبه نوع دیگر از لحاظ حذف اشتباه بسیار سودمند هستند و ما استفاده از آنها را در تمام کارها شامل طراحی و تحلیل شدیداً توصیه می‌کنیم.)

ث - برای محاسبه ولتاژ خط در سرهای منبع، ابتدا V_{an} را محاسبه می‌کنیم. از شکل (۲-۱۲) ملاحظه می‌کنیم که V_{an} برابر افت ولتاژ در دوسر امپدانس خط و دوسر امپدانس بار است. از این رو:

$$V_{an} = (39.8 + j29.5)2.4 \angle -36.87^\circ = 118.90 \angle -0.32^\circ V$$

بنابراین ولتاژ خط V_{ab} چنین است:

$$V_{ab} = \sqrt{3} \angle 30^\circ V_{an} \quad \text{یا} \quad V_{ab} = 205.94 \angle 29.68^\circ V$$

بنابراین:

$$V_{bc} = 205.94 \angle -90.32^\circ V$$

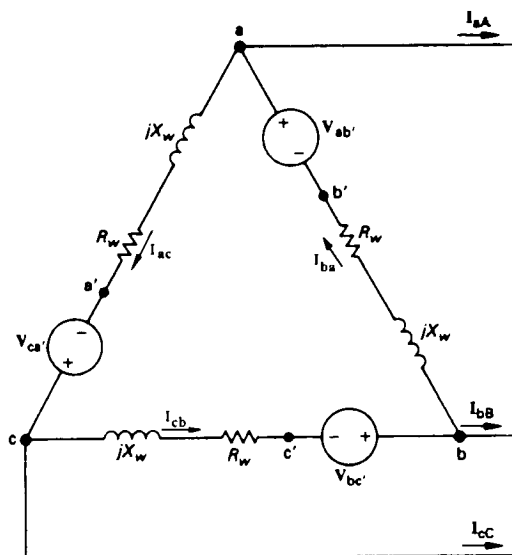
$$V_{ca} = 205.94 \angle 149.68^\circ V$$

۵-۲ تحلیل مدار Δ -Y

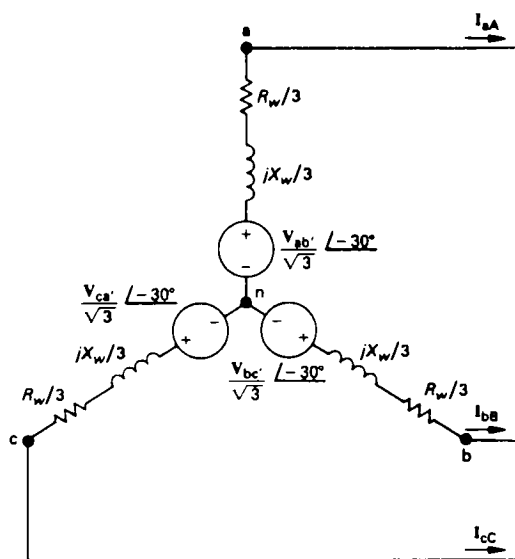
در مدار سه فاز Δ -Y، منبع به صورت دلتا و بار به صورت وای وصل شده است. می‌توان مدار معادل تک فاز را با جایگزین کردن منبع وصل شده به صورت Δ با یک منبع معادل Y به دست آورد. می‌توان منبع معادل Y را از تقسیم ولتاژ فاز درونی منبع Δ بر $\sqrt{3}$ و انتقال این دسته ولتاژهای سه فاز به میزان $30^\circ -$ در صورت مثبت بودن دنباله فازی و $30^\circ +$ در صورت منفی بودن دنباله فازی، به دست آورد. امپدانس درونی معادل Y برابر یک سوم امپدانس درونی منبع Δ است. مدار معادل Y یک منبع وصل شده به صورت Δ با دنباله فازی مثبت در شکل (۲-۱۳) نشان داده شده است.

برای دنباله فازی مثبت، دسته جریانهای فازی منبع Δ (I_{ac} ، I_{cb} ، I_{ba}) در شکل (۲-۱۳) از دسته جریانهای خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} به میزان 30° جلو می‌افتد. اندازه جریان فاز $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر اندازه جریان خط است. برای دنباله فازی منفی، جریانهای فازی در منبع از جریانهای خط عقب می‌افتند.

برای نشان دادن اینکه منبع Y شکل (۲-۱۳ ب) معادل منبع Δ شکل (۲-۱۳ الف) است، لازم است تنها نشان داده شود که دو مدار شرایط سرهای یکسانی برای هر اتصال خارجی متعادل وصل شده به سرهای a، b و c فراهم می‌آورند. دو شرط آزمایشی که اثبات آنها راحت‌ترین است مدارهای باز و مدارهای اتصال کوتاه است. برای شرایط مدار باز سه جریان خط برابر صفر بوده دو مدار معادل هستند اگر ولتاژهای یکسانی میان سرهای a، b و c تحویل دهند. برای یک اتصال کوتاه خارجی که سرهای a، b و c را وصل می‌کند، ولتاژهای خط صفر بوده و دو مدار معادل هستند، اگر جریان خط یکسانی تحویل دهند. اثبات اینکه این دو مدار معادل هستند به خواننده واگذار می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۱۳ معادل Y یک منبع سه فاز متعادل، وصل شده به صورت Δ
 (دنباله فازی مثبت): (الف) منبع ؛ (ب) Y معادل.

مثال ۳ یک منبع متعادل وصل شده به صورت Δ با دنباله فازی منفی، دارای امپدانس درونی $z + j0.18$ اهم بر فاز است. در حالت بدون بار، اندازه ولتاژ سر منبع ۶۰۰ ولت است. این منبع به یک بار وصل شده به صورت Y، وصل می شود که امپدانس آن $76.35 - j4.92$ اهم بر فاز است. امپدانس خط توزیع برابر $296 + j0.74$ اهم بر فاز است.

الف - مدار معادل تک فاز سیستم را رسم کنید و $V_{ab'}$ را به عنوان فاز مبنا به کار ببرید.

ب - اندازه ولتاژ خط را در سرهای بار حساب کنید.

پ - سه جریان خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

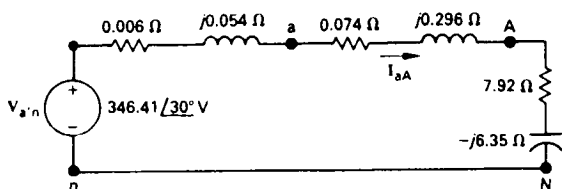
ت - جریانهای فاز I_{ba} ، I_{cb} و I_{ac} منبع را محاسبه کنید.

ث - اندازه ولتاژ خط را در سرهای منبع محاسبه کنید.

حل الف - در حالت بی بار، ولتاژ سر معادل ولتاژ درونی منبع است. بنابراین اندازه ولتاژ درونی منبع Δ ، ۶۰۰ ولت است. با به کار بردن $V_{ab'}$ به عنوان فاز مبنا، ولتاژ درونی فاز a منبع معادل Y را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$V_{a'n} = \frac{V_{ab'}}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = \frac{600}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ \cong 346.41 \angle 30^\circ \text{ V}$$

امپدانس درونی مولد معادل Y برابر $(0.18 + j0.162) \left(\frac{1}{3}\right)$ یا $0.06 + j0.054 \Omega$ اهم بر فاز است. بنابراین مدار معادل تک فاز مطابق شکل (۱۴-۲) است.



شکل ۱۴-۲ مدار معادل تک فاز مثال ۳.

ب - از مدار شکل (۱۴-۲) مستقیماً نتیجه می شود که:

$$I_{aA} = \frac{346.41 \angle 30^\circ}{1.000 - j6.000} = 34.64 \angle 66.87^\circ \text{ A}$$

و:

$$V_{AN} = (7.92 - j6.35)(34.64 \angle 66.87^\circ) = 351.65 \angle 28.15^\circ \text{ V}$$

اندازه ولتاژ خط در سرهای بار چنین است:

$$|V_{AB}| = \sqrt{3} |V_{AN}| = 609.08 \text{ V}$$

پ - با به کار بردن نتایج قسمت (ب) جریانهای خط را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$I_{aA} = 34.64 \angle 66.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{bB} = 34.64 \angle 186.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 34.64 \angle -53.13^\circ \text{ A}$$

ت - جریانهای فاز مولد را می توان مستقیماً از جریانهای خط محاسبه کرد. چون دنباله فازی منفی

است، داریم:

$$I_{ba} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ\right) I_{aA} = 20 \angle 36.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cb} = 20 \angle 156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{ac} = 20 \angle -83.13^\circ \text{ A}$$

ث - از مدار شکل (۲-۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} V_{an} &= (7.994 - j6.054) I_{aA} \\ &= (7.994 - j6.054) 34.64 \angle 66.87^\circ \\ &= 347.37 \angle 29.73^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

اندازه ولتاژ خط در سرهای منبع چنین خواهد بود:

$$|V_{ab}| = \sqrt{3} |V_{an}| = 601.66 \text{ V}$$

۲-۶ تحلیل مدارهای $\Delta-\Delta$

در مدار $\Delta-\Delta$ هم منبع و هم بار به صورت Δ وصل شده‌اند. مدار تک فاز معادل یک سیستم $\Delta-\Delta$ متعادل با جایگزین کردن منبع و بار با اتصال‌های معادل Y آنها به دست می‌آید. مانند قبل، مدار معادل Y برای حل جریانهای خط و ولتاژ خط به خنثی به کار می‌رود. وقتی که جریانهای خط را بدانیم، می‌توانیم جریانهای فاز را در بار و منبع با به کار بردن روش بیان شده در بخش‌های ۲-۴ و ۲-۵ به دست آوریم. ولتاژهای خط به خنثی را می‌توان مانند بخش ۲-۳ به ولتاژهای خط به خط تبدیل کرد. تمام این روشها را در مثالهای ۱، ۲ و ۳ تشریح کردیم.

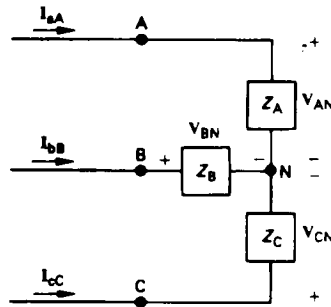
۳- محاسبه توان در مدارهای سه فاز متعادل

تاکنون تحلیل مدارهای سه فاز متعادل را به تعیین ولتاژها و جریانها در یک مدار داده شده محدود کردیم. اکنون محاسبات توان سه فاز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطلب را با بحث توان متوسط تحویل داده شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Y آغاز می‌کنیم.

۱-۳ توان متوسط در یک بار Y متعادل

یک بار وصل شده به صورت Y همراه با جریانها و ولتاژهای مربوط در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. توان متوسط مربوط به هر فاز را می‌توان با به کار بردن روشهای معرفی شده در فصل ۷ محاسبه کرد. توان متوسط متناظر با فاز a بار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_A = |V_{AN}| |I_{aA}| \cos(\theta_{vA} - \theta_{iA}) \quad (1-3)$$



شکل ۱-۳ یک بار Y متعادل به کار رفته برای معرفی محاسبه توان متوسط در یک مدار سه فاز.

که در آن θ_{vA} و θ_{iA} به ترتیب زاویه‌های فازی V_{AN} و I_{aA} هستند. با به کار بردن طرز نمایش معرفی شده در معادله (۱-۳)، توان متناظر با فازهای b و c عبارتند از:

$$P_B = |V_{BN}| |I_{bB}| \cos(\theta_{vB} - \theta_{iB}) \quad (۲-۳)$$

$$P_C = |V_{CN}| |I_{cC}| \cos(\theta_{vC} - \theta_{iC}) \quad (۳-۳)$$

در معادلات (۱-۳) تا (۳-۳) تمام فازورهای جریان و ولتاژ برحسب مقادیر rms توابع سینوسی متناظر آنها نوشته شده‌اند.

در یک سیستم سه فاز متعادل، اندازه همه ولتاژهای خط به خنثی یکسان بوده، همچنین اندازه جریانهای فاز نیز یکسان است. آرگومان تابع کسینوسی نیز برای هر سه فاز یکسان است. برای تاکید این ملاحظات، طرز نمایش زیر را که سادگی‌های بیشتری در بحث محاسبات توان در مدارهای سه فاز متعادل فراهم می‌آورد، معرفی می‌کنیم:

$$V_\phi = |V_{AN}| = |V_{BN}| = |V_{CN}| \quad (۴-۳)$$

$$I_\phi = |I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}| \quad (۵-۳)$$

و:

$$\theta_\phi = \theta_{vA} - \theta_{iA} = \theta_{vB} - \theta_{iB} = \theta_{vC} - \theta_{iC} \quad (۶-۳)$$

به علاوه، توان تحویل شده به هر فاز بار در یک سیستم متعادل یکسان است و از این رو:

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۷-۳)$$

که در آن P_ϕ توان متوسط هر فاز را نشان می‌دهد.

توان متوسط کل تحویل شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Y، به سادگی سه برابر توان هر فاز است، یعنی:

$$P_T = 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۸-۳)$$

همچنین سودمند است که توان کل را برحسب مقادیر rms اندازه ولتاژ خط و مقادیر rms اندازه جریان خط بیان کنیم. اگر V_L نشان دهنده مقدار rms اندازه ولتاژ خط و I_L نشان دهنده مقدار rms اندازه جریان خط باشد، در این صورت می‌توان معادله (۸-۳) را به صورت زیر اصلاح کرد:

$$P_T = 3 \left(\frac{V_L}{\sqrt{3}} \right) I_L \cos \theta_\phi$$

$$= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi \quad (9-3)$$

در به دست آوردن معادله (۹-۳) از این حقیقت استفاده کردیم که برای یک بار متعادل وصل شده به صورت Y، اندازه ولتاژ فاز برابر اندازه ولتاژ خط تقسیم بر $\sqrt{3}$ است و اندازه جریان خط مساوی اندازه جریان فاز است. در به کار بردن معادله (۹-۳) برای محاسبه توان کل تحویل شده به بار، مهم است که به یاد داشته باشیم که θ_ϕ زاویه فاز میان ولتاژ فاز و جریان فاز است.

۲-۳ توان مختلط در یک بار Y متعادل

با به کار بردن روشهای معرفی شده در فصل ۷، می توان توان مختلط و توان راکتیو متناظر با هر فاز یک بار متعادل وصل شده به صورت Y را محاسبه کرد. برای یک بار متعادل، عبارتهای توان راکتیو چنین است:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (10-3)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_\phi \quad (11-3)$$

معادله $S = \mathbf{V}_{eff} \mathbf{I}_{eff}^* = P + jQ$ مبنای بیان توان مختلط متناظر با هر فاز است. برای یک بار متعادل داریم:

$$S = \mathbf{V}_{AN} \mathbf{I}_{aA}^* = \mathbf{V}_{BN} \mathbf{I}_{bB}^* = \mathbf{V}_{CN} \mathbf{I}_{cC}^* = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^* \quad (12-3)$$

که در آن $\mathbf{V}_\phi$ و $\mathbf{I}_\phi$ نشان دهنده ولتاژ فاز و جریان فاز همان فاز است. بنابراین در حالت کلی داریم:

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^* \quad (13-3)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_\phi \quad (14-3)$$

۳-۳ محاسبات توان در یک بار Δ متعادل

در صورتی که بار به صورت Δ وصل شده باشد، محاسبه توان — توان راکتیو یا توان مختلط — اساساً مشابه حالت بار وصل شده به صورت Y است. یک بار وصل شده به صورت دلتا به همراه جریانه‌ها و ولتاژهای مربوط در شکل (۲-۳) نشان داده شده است که از آن توانهای متناظر با هر فاز به صورت زیر به دست می آید:

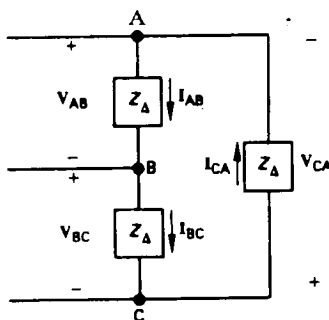
$$P_A = |\mathbf{V}_{AB}| |\mathbf{I}_{AB}| \cos(\theta_{vAB} - \theta_{iAB}) \quad (15-3)$$

$$P_B = |\mathbf{V}_{BC}| |\mathbf{I}_{BC}| \cos(\theta_{vBC} - \theta_{iBC}) \quad (16-3)$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CA}| |\mathbf{I}_{CA}| \cos(\theta_{vCA} - \theta_{iCA}) \quad (17-3)$$

برای یک بار متعادل داریم:

$$|\mathbf{V}_{AB}| = |\mathbf{V}_{BC}| = |\mathbf{V}_{CA}| = V_\phi \quad (18-3)$$



شکل ۲-۳ بار وصل شده به صورت Δ به کار رفته در بحث محاسبات توان.

$$|I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}| = I_\phi \quad (۱۹-۳)$$

$$\theta_{vAB} - \theta_{iAB} = \theta_{vBC} - \theta_{iBC} = \theta_{vCA} - \theta_{iCA} = \theta_\phi \quad (۲۰-۳)$$

و:

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۲۱-۳)$$

قابل ذکر است که معادله (۲۱-۳) همان معادله (۷-۳) است. این مطلب معادل با این بیان است "که در یک بار متعادل، توان متوسط هر فاز برابر حاصلضرب مقادیر rms ولتاژ فاز و rms جریان فاز و کسینوس زاویه میان ولتاژ فاز و جریان فاز است."

توان کل تحویل شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Δ چنین است:

$$\begin{aligned} P_T &= 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \\ &= 3V_L \left(\frac{I_L}{\sqrt{3}} \right) \cos \theta_\phi \\ &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi \end{aligned} \quad (۲۲-۳)$$

توجه کنید که معادله (۲۲-۳) همان معادله (۹-۳) است.

عبارت‌های مربوط به توان راکتیو و توان مختلط نیز دارای همان صورت به دست آمده برای بار

وصل شده به صورت Y است:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (۲۳-۳)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = 3V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (۲۴-۳)$$

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = V_\phi I_\phi^* \quad (۲۵-۳)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_\phi \quad (۲۶-۳)$$

مثالهای ۴ تا ۶ محاسبه توان را در یک مدار سه فاز متعادل تشریح می‌کنند.

مثال ۴ الف - توان متوسط هر فاز را که به بار وصل شده به صورت Y مثال ۱ تحویل داده می‌شود، حساب کنید.

ب - کل توان متوسط تحویل داده شده به بار را حساب کنید.

- پ - کل توان متوسط تلف شده در خط را حساب کنید.
- ت - کل توان متوسط تلف شده در مولد را حساب کنید.
- ث - کل تعداد ولت آمپرهای راکتیو مغناطیس کننده جذب شده توسط بار را حساب کنید.
- ج - کل توان مختلط تحویل داده شده توسط منبع را حساب کنید.
- حل الف - از مثال ۱ داریم: $V_\phi = 115/22V$, $I_\phi = 2/4A$, و $\theta_\phi = -1/19 - (-36/87) = 35/68^\circ$
- بنابراین:

$$P_\phi = (115/22)(2/4) \cos 35/68^\circ = 224/64 \text{ وات}$$

توان هر فاز را می توان از رابطه $R_\phi I_\phi^2$ نیز حساب کرد:

$$P_\phi = (39)(2/4)^2 = 224/64 \text{ وات}$$

- ب - کل توان متوسط تحویل داده شده به بار برابر $P_T = 3P_\phi = 673/92 \text{ W}$ است. چون ولتاژ خط را در مثال ۱ حساب کردیم، بنابراین می توان معادله $(9-3)$ را نیز به کار برد:

$$P_T = (\sqrt{3})(199/58)(2/4) \cos 35/68^\circ = 673/92 \text{ W}$$

- پ - کل توان تلف شده در خط چنین است:

$$P_{\text{خط}} = (3)(2/4)^2(0/8) = 13/824 \text{ W}$$

- ت - کل توان متوسط تلف شده در مولد چنین است:

$$P_{\text{مولد}} = (3)(2/4)^2(0/2) = 3/456 \text{ W}$$

- ث - کل ولت آمپر راکتیو مغناطیس کننده که توسط بار جذب می شود، چنین است:

$$Q_T = (\sqrt{3})(199/58)(2/4) \sin 35/68^\circ = 483/84 \text{ VAR}$$

- ج - کل توان مختلط مربوط به منبع چنین است:

$$S_T = 3S_\phi = -3(120)(2/4) \angle 36/87^\circ$$

$$= -691/20 - j518/40 \text{ VA}$$

- علامت منفی نشان می دهد که توان درونی و توان راکتیو مغناطیس کننده، به مدار تحویل می شود. می توان نتیجه را با محاسبه کل توان و توان راکتیو جذب شده توسط مدار مطابقت داد. بنابراین:

$$P = 673/92 + 13/824 + 3/456$$

$$= 691/20 \text{ W (مطابقت دارد)}$$

$$Q = 483/84 + 3(2/4)^2(1/5) + 3(2/4)^2(0/5)$$

$$= 483/84 + 25/92 + 8/64$$

$$= 518/40 \text{ VAR (مطابقت دارد)}$$

مثال ۵ الف - کل توان مختلط تحویل داده شده به بار وصل شده به صورت Δ مثال ۲ را حساب کنید.

ب - چند درصد از توان متوسط ارسالی مولد به بار تحویل داده می شود؟

حل الف - با به کار بردن مقادیر فاز a از حل مثال ۲ داریم:

$$V_\phi = V_{AB} = 202.72 \angle 29.04^\circ \text{ V}$$

$$I_\phi = I_{AB} = 1.39 \angle -61.87^\circ \text{ A}$$

با به کار بردن معادلات (۳-۲۵) و (۳-۲۶) داریم:

$$S_T = 3(202.72 \angle 29.04^\circ)(1.39 \angle -61.87^\circ)$$

$$= 682.56 + j494.208 \text{ VA}$$

ب - کل توان ارسالی مولد برابر مجموع توان کل تحویل داده شده به بار به اضافه توان کل تلف شده در خط است. بنابراین:

$$P_{\text{ورودی}} = 682.56 + 3(2.4)^2(0.3) = 687.744 \text{ W}$$

درصدی از توان متوسط در ورودی خط توزیع که به بار تحویل داده می شود برابر $\frac{682.56}{687.744}$ یا ۹۹.۲۵٪ است.

مثال ۶ یک بار متعادل سه فاز، ۴۸۰ کیلووات با ضریب توان پس فاز ۰.۸ نیاز دارد. بار از خطی با

امپدانس $0.25 + j0.05 \Omega$ اهم بر فاز تغذیه می شود. ولتاژ خط در سرهای بار برابر ۶۰۰ ولت است.

الف - مدار معادل تک فاز سیستم را رسم کنید.

ب - اندازه جریان خط را محاسبه کنید.

پ - اندازه ولتاژ خط را در سر ارسالی آن محاسبه کنید.

ت - ضریب توان را در سر ارسالی خط محاسبه کنید.

حل الف - مدار شکل (۳-۳) مدار معادل تک فاز را نشان می دهد. ما به دلخواه ولتاژ خط به

خنثی را در سر بار به عنوان مبنا انتخاب می کنیم.

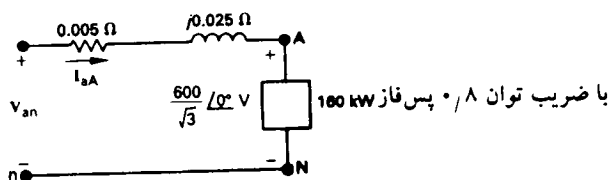
ب - جریان خط I_{aA} عبارت است از:

$$\left(\frac{600}{\sqrt{3}}\right) I_{aA}^* = (160 + j120) 10^2$$

یا:

$$I_{aA}^* = 577.35 \angle 36.87^\circ \text{ A}$$

بنابراین $I_{aA} = 577.35 \angle -36.87^\circ \text{ A}$. اندازه جریان خط برابر اندازه I_{aA} است:



شکل ۳-۳ مدار معادل تک فاز مثال ۶.

$$I_L = 577.35 \text{ A}$$

برای I_L راه حل دیگری با استفاده از عبارت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} P_T &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_p \\ &= \sqrt{3} (600) I_L (0.8) = 480,000 \text{ W} \\ I_L &= \frac{480,000}{\sqrt{3} (600) (0.8)} = \frac{1000}{\sqrt{3}} = 577.35 \text{ A} \end{aligned}$$

پ - برای محاسبه اندازه ولتاژ خط در سرهای ارسالی آن، نخست V_{an} را حساب می کنیم. از شکل (۳-۳) داریم:

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_{AN} + Z_L I_{aA} \\ &= \frac{600}{\sqrt{3}} + (0.005 + j0.025)(577.35 \angle -36.87^\circ) \\ &= 357.51 \angle 1.57^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$V_L = \sqrt{3} |V_{an}| = 619.23 \text{ V}$$

ت - ضریب توان در سر ارسالی خط برابر کسینوس زاویه فاز میان I_{aA} و V_{an} است:

$$\begin{aligned} \text{pf} &= \cos[1.57^\circ - (-36.87^\circ)] \\ &= \cos 38.44^\circ = 0.783 \end{aligned}$$

راه دیگر محاسبه ضریب توان آن است که ابتدا توان مختلط را در سر ارسالی خط محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} S_\phi &= (160 + j120)10^3 + (577.35)^2(0.005 + j0.025) \\ &= 161.67 + j128.33 \text{ kVA} \\ &= 206.41 \angle 38.44^\circ \text{ kVA} \end{aligned}$$

ضریب توان چنین است:

$$\text{pf} = \cos 38.44^\circ = 0.783$$

بالاخره، اگر کل توان مختلط را در سر ارسالی خط حساب کنیم، پس از آنکه ابتدا اندازه جریان خط را حساب کردیم، می توانیم این مقدار را برای محاسبه V_L به کار ببریم. یعنی:

$$\sqrt{3} V_L I_L = 3(206.41) \times 10^3$$

$$V_L = \frac{3(206.41) \times 10^3}{\sqrt{3}(577.35)} = 619.23 \text{ V}$$

۴-۳ توان لحظه‌ای در مدارهای سه فاز

اگرچه ما اساساً به محاسبات توان متوسط، راکتیو و مختلط علاقه‌مند هستیم، محاسبه‌ی کل توان لحظه‌ای نیز اهمیت دارد. کل توان لحظه‌ای در یک مدار سه فاز متعادل یک خاصیت قابل توجه دارد: این توان با زمان تغییر نمی‌کند!

برای نشان دادن این خاصیت، فرض کنید ولتاژ لحظه‌ای خط به خنثی v_{AN} به عنوان مبنا انتخاب شود و مانند قبل θ_ϕ زاویه فاز $\theta_{vA} - \theta_{iA}$ باشد. در این صورت، برای دنباله‌ی فازی مثبت توان لحظه‌ای در هر فاز چنین است:

$$p_A = v_{AN} i_{aA} = V_\phi I_\phi \cos \omega t \cos(\omega t - \theta_\phi)$$

$$p_B = v_{BN} i_{bB} = V_\phi I_\phi \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta_\phi - 120^\circ)$$

و:

$$p_C = v_{CN} i_{cC} = V_\phi I_\phi \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t - \theta_\phi + 120^\circ)$$

که در آن V_ϕ و I_ϕ به ترتیب نشان دهنده‌ی مقادیر rms ولتاژ خط به خنثی و جریان خط هستند. کل توان لحظه‌ای برابر مجموع توانهای لحظه‌ای فاز است که به صورت $\frac{1}{\sqrt{3}} V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi$ ساده می‌شود. یعنی:

$$p_T = p_A + p_B + p_C = \frac{1}{\sqrt{3}} V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi$$

به دست آوردن این رابطه ساده شده به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

یک خاصیت مهم مدارهای سه فاز آن است که کل توان لحظه‌ای ثابت است. بنابراین گشتاور ایجاد شده بر روی محور یک موتور سه فاز ثابت است و این بدین معناست که ارتعاشات در ماشین‌آلاتی که به وسیله‌ی موتورهای سه فاز تغذیه می‌شوند، کمتر است.

۴- کاربرد اسپایس در حل مدارهای سه فاز

برنامه‌ی تحلیل مدار اسپایس را می‌توان برای تحلیل مدارهای فازوری سه فاز نیز به کار برد. برای به دست آوردن فازور جریانهای خط و فاز منبع و بار، منابع ولتاژ صفر ولتی را می‌توان به عنوان آمپر متر در مدار قرار داد. اما باید مقادیر عناصر مداری که هر فاز بار را تشکیل می‌دهند معلوم باشند؛ یعنی بجای اینکه امپدانس خالص هر فاز را بدانیم باید عناصر RLC مداری و ترکیب آنها را بدانیم. البته این مطلب معمولاً مشکلی ایجاد نمی‌کند، زیرا اگر مقادیر امپدانس خالص هر فاز هم داده شده باشند، می‌توان

مدارهای ساده RL یا RC سری را چنان ترکیب کرد که این امپدانس‌ها را به دست دهند. در حقیقت می‌توان امپدانس‌های منبع را هم در هر فاز مولد قرار داد بدون آنکه مشکلی از لحاظ حل به وجود بیاید.

مثال ۷ با استفاده از برنامه اسپایس، توان متوسط کل تحویل داده شده به بار سه فاز نامتعادل نشان داده شده در شکل (۴-۱ الف) را به دست آورید. مولد سه فاز با امپدانس درونی هر فاز شامل مقاومت 0.15Ω سری با خود القایی 8 میلی هانری مدل‌سازی شده است.

حل برای آنکه توان متوسط کل تحویل داده شده به بار را تعیین کنیم، از برنامه اسپایس برای تعیین فازورهای جریان هر فاز بار یعنی $\hat{I}_A$ ، $\hat{I}_B$ و $\hat{I}_C$ استفاده می‌کنیم. سپس توان متوسط تلف شده در مقاومتهای فاز را با هم جمع می‌کنیم:

$$P_{\text{ave بار}} = |\hat{I}_A|^2 \times 5 + |\hat{I}_B|^2 \times 3 + |\hat{I}_C|^2 \times 4$$

مدار آماد شده اسپایس در شکل (۴-۲ ب) نشان داده شده است، که از آن برنامه اسپایس را به دست می‌آوریم:

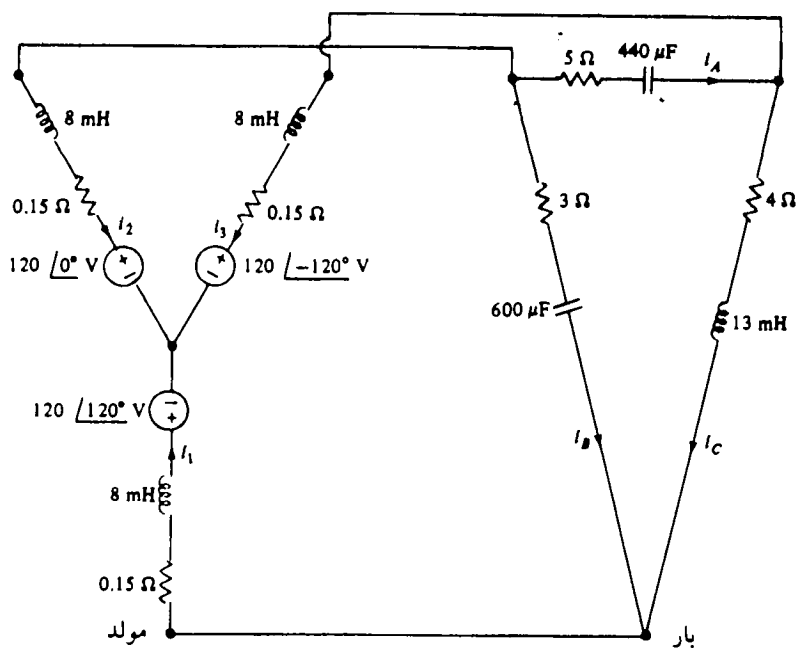
Example Three-phase Circuit

```

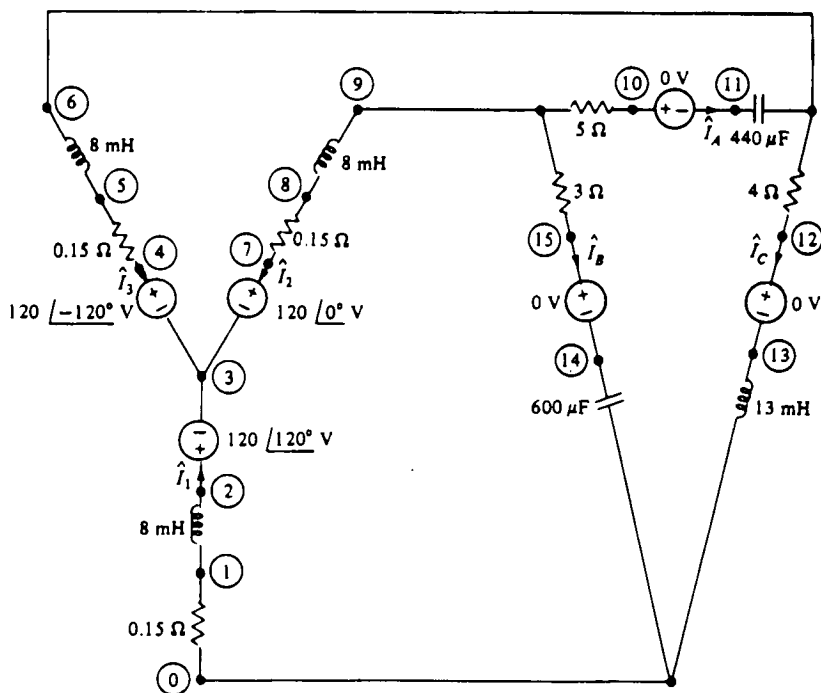
R1  0  1  0.15
L1  1  2  8M
V1  2  3  AC  120  120
R2  7  8  0.15
L2  8  9  8M
V2  7  3  AC  120
R3  4  5  0.15
L3  5  6  8M
V3  4  3  AC  120  -120
RB  9  15  3
VB  15  14
CB  14  0  600U
RA  9  10  5
VA  10  11
CA  11  6  440U
RC  6  12  4
VC  12  13
LC  13  0  13M
.AC  DEC  1  60  60
.PRINT AC IM(VA) IP(VA) IM(VB) IP(VB) IM(VC) IP(VC)
.END

```

نتایج اسپایس عبارتند از:



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱ حل مسئله سه فاز نامتعادل با استفاده از اسپایس. (الف) مدار اصلی؛ (ب) مدار اسپایس.

$$\hat{I}_A = 15,29 \angle -34,01^\circ$$

$$\hat{I}_B = 45,95 \angle -51,49^\circ$$

$$\hat{I}_C = 22,62 \angle -177,2^\circ$$

بنابراین توان متوسط کل تلف شده در بار چنین است:

$$P_{\text{ave بار}} = (15,29)^2 \times 5 + (45,95)^2 \times 3 + (22,62)^2 \times 4$$

$$= 9549,79 \text{ وات}$$

جریانهای وارد شونده به سرهای مثبت منابع ولتاژ مولد را نیز می توان با قرار دادن دستور زیر در برنامه بالا به دست آورد:

.PRINT AC IM(V1) IP(V1) IM(V2) IP(V2) IM(V3) IP(V3)

نتایج عبارتند از:

$$\hat{I}_1 = 37,55 \angle -80,78^\circ$$

$$\hat{I}_2 = 60,71 \angle 132,9^\circ$$

$$\hat{I}_3 = 36,05 \angle -11,92^\circ$$

بنابراین توان متوسط کل تحویل داده شده به وسیله منابع مولد چنین است:

$$P_{\text{ave مولد}} = -\text{Re}(\hat{V}_1 \hat{I}_1^*) - \text{Re}(\hat{V}_2 \hat{I}_2^*) - \text{Re}(\hat{V}_3 \hat{I}_3^*)$$

$$= -\text{Re}(120 \angle 120^\circ \times 37,55 \angle -80,78^\circ) - \text{Re}(120 \angle 0^\circ \times 60,71 \angle 132,9^\circ)$$

$$- \text{Re}(120 \angle -120^\circ \times 36,05 \angle -11,92^\circ)$$

$$= 10514,62 \text{ وات}$$

اختلاف $P_{\text{ave بار}} - P_{\text{ave مولد}} = 964,84 \text{ W}$ توان مصرف شده در مقاومت های $0,15 \Omega$ مولد است:

$$P_{\text{ave}} = |\hat{I}_1|^2 \times 0,15 + |\hat{I}_2|^2 \times 0,15 + |\hat{I}_3|^2 \times 0,15$$

$$= 959,3 \text{ W}$$

مثال ۷ مطلبی را که تا به حال باید بدیهی بوده باشد، نشان داده است: برنامه های تحلیل مدار مانند اسپیس را می توان برای تحلیل مداری بسیار پیچیده به کار برد، اما هنوز باید مفاهیم اصلی و اصول تحلیل مدار را درک کنیم تا بتوانیم این برنامه ها را صحیح تر و موثرتر به کار گیریم.

خلاصه

- میانبرهای تحلیلی: کلید تمام میانبرهای تحلیلی تبدیل مدار سه فاز متعادل به ساختار Y-Y و سپس جایگزینی ساختار Y-Y با یک مدار معادل تک فاز است.

- مدار معادل تک فاز: مدار معادل تک فاز برای محاسبه جریان خط و ولتاژ خط به خنثی در ساختار $Y-Y$ تک فاز به کار می‌رود. فاز a معمولاً به عنوان فاز مبنا انتخاب می‌شود.
- انتقال دادن محاسبات تک فاز: جریان خط و هر ولتاژ خط به خنثی را که از فاز a مدار معادل تک فاز محاسبه می‌شود، می‌توان برای یافتن هر جریان یا ولتاژ در مدار سه فاز متعادل بر مبنای حقایق زیر به کار گرفت:
 - ۱- در یک سیستم متعادل جریانه‌ها و ولتاژهای فاز b و c با جریان و ولتاژ متناظر فاز a یکسان هستند به جز آنکه ۱۲۰° درجه انتقال فاز دارند. در مدارهای با دنباله فازی مثبت، کمیت فاز b از کمیت فاز a به اندازه ۱۲۰° عقب می‌افتد و کمیت فاز c از کمیت فاز a به اندازه ۱۲۰° جلو می‌افتد. برای مدارهای با دنباله فازی منفی فازهای b و c نسبت به فاز a جابه‌جا می‌شوند.
 - ۲- دسته ولتاژهای خط نسبت به دسته ولتاژهای خط به خنثی $\pm 30^\circ$ اختلاف فاز دارند. علامت $+$ یا $-$ به ترتیب متناظر با دنباله فازی مثبت و منفی است.
 - ۳- اندازه ولتاژ خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ خط به خنثی است.
 - ۴- دسته جریانه‌های خط نسبت به دسته جریانه‌های فاز در منابع و بارهای وصل شده به صورت Δ به مقدار $\pm 30^\circ$ اختلاف فاز دارند. علامت $-$ یا $+$ به ترتیب متناظر با دنباله فازی مثبت و منفی است.
 - ۵- اندازه جریان خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان فاز در منبع یا بار وصل شده به صورت Δ است.
- محاسبات توان در مدارهای سه فاز مشتمل بر روشهای زیر است:
 - توان هر فاز: روشهای محاسبه توان متوسط، توان راکتیو و توان مختلط هر فاز با روشهای فصل ۷ یکسان هستند.
 - توان کل: توان کل حقیقی، راکتیو و مختلط را می‌توان یا با ضرب کردن توان متناظر هر فاز در ۳ و یا با استفاده از عبارتهای مربوط به جریان خط و ولتاژ خط داده شده در معادلات (۳-۹)، (۳-۱۱) و (۳-۱۴) تعیین کرد.
 - توان لحظه‌ای: توان لحظه‌ای کل در یک مدار سه فاز متعادل ثابت بوده و مساوی $1/5$ برابر توان متوسط هر فاز است.

مسائل

- ۱- عبارتهای حوزه زمانی ولتاژهای خط به خنثی در سرهای بار وصل شده به صورت Y چنین هستند:

$$v_{AN} = 310 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

$$v_{BN} = 310 \cos(\omega t + 180^\circ)$$

فصل هشتم

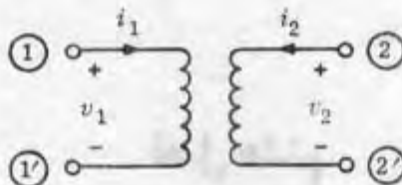
عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

در فصل دوم سه نوع اصلی عناصر مدار، که مقاومت، خازن و سلف میباشد را معرفی کردیم. تمام این عناصر دارای دوسر میباشد (یا یک قطبی هستند) و بنابراین بوسیله روابطی که ولتاژ شاخه آنها را به جریان شاخه مربوط میکند مشخص میشوند. در فصلهای سوم تا هفتم مدارهای خاصی که شامل چنین عناصر دو سری بودند را تجزیه و تحلیل نمودیم. حال، قبل از ارائه روشهای کلی تجزیه و تحلیل مدار، می خواهیم بعضی دیگر از عناصر مفید مدار، مانند سلفهای تزویج شده^(۱) ترانسفورماتور ایده آل، و منابع کنترل شده (یا منابع وابسته) را معرفی کنیم. تفاوت این عناصر با مقاومت، سلف و خازن در آنست که این عناصر پیش از یک شاخه دارند و جریان و ولتاژ یک شاخه به ولتاژها و جریانهای شاخه های دیگر مربوط است. به همین جهت آنها **عناصر تزویج کننده**^(۲) نامیده میشوند. در این فصل، مشخصه ها و خواص این عناصر را خواهیم دید. علاوه بر آن، بمنظور نشان دادن بعضی روشهای تجزیه و تحلیل برای مدارهایی که شامل عناصر تزویج کننده میباشد، مثالهایی بیان خواهیم کرد.

۱- سلفهای تزویج شده

دو سیم پیچی که در مجاورت یکدیگر قرار دارند، مطابق شکل (۱-۱)، را در نظر بگیرید. برای منظورهای کنونی، این موضوع که سیم پیچی ها بدور یک هسته از ماده مغناطیسی پیچیده شده باشند یا نه، هیچگونه اهمیتی ندارد. معهذاً، فرض میکنیم که سیم پیچی ها نسبت بیکدیگر، و یا نسبت به هسته ای که ممکن است بدوران پیچیده شده باشند، حرکت نمیکند.

برای ولتاژ و جریان «جهت های قرار دادی» را مطابق شکل (۱-۱) انتخاب میکنیم.



شکل ۱-۱- سیم‌پیچی‌های تزویج شده و جهت‌های قرار دادی آنها

توجه کنید که این جهت‌های قرار دادی، «جهت‌های قرار دادی متناظر» برای هر سیم‌پیچی می‌باشند. این جهت‌ها دربارهٔ جهت‌های واقعی ولتاژ و جریان، و یا ولتاژ نسبی سرها هیچگونه اطلاعاتی به ما نمی‌دهند. جهت‌های قرار دادی تنها برای معین کردن علامت کمیتی که پدیدهٔ واقعی را نمایش می‌دهند لازم می‌باشند.

بمنظور استفاده‌های بعدی باید توجه کرد که اگر در مدار مغناطیسی دو سیم‌پیچی، ماده فرو مغناطیسی داشته باشیم، و وقتی که مقادیر جریانها باندازه کافی بزرگ باشند، روابط میان شارهای Φ_1 و Φ_2 و جریانهای i_1 و i_2 دیگر خطی نمی‌باشند. در این مورد، معادلات بصورت زیر می‌باشند:

$$\Phi_1 = f_1(i_1, i_2)$$

$$\Phi_2 = f_2(i_1, i_2)$$

که در آن f_1 و f_2 توابعی غیر خطی از جریانهای i_1 و i_2 می‌باشند. بموجب قانون فاراده:

$$v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt}$$

در اینجا باید تاکید نمود که چهار مشتق جزئی بالا توابعی از i_1 و i_2 می‌باشند. واضح است که وقتی چنین معادلات «غیر خطی» بین شار و جریان داریم مسأله بسیار پیچیده است، و ما تا فصل هفدهم، بیش از این سیم‌پیچی‌های تزویج شده غیر خطی را در نظر نخواهیم گرفت.

۱-۱- توصیف سلفهای تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان

فرض کنید یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان داشته باشیم* . چون سلف‌ها خطی میباشند ، هر شار بایستی تابع خطی جریانها باشد ، و چون سلف‌ها تغییر ناپذیر با زمان میباشند ، ضرایب این توابع خطی بایستی مقادیر ثابت باشند (یعنی صریحاً بزمان بستگی نداشته باشند) . بنابراین میتوان نوشت :

$$\Phi_1(t) = L_{11}i_1(t) + M_{12}i_2(t)$$

$$\Phi_2(t) = M_{21}i_1(t) + L_{22}i_2(t)$$

که در آن ثابت‌های L_{11} ، L_{22} ، M_{12} و M_{21} به زمان و به جریانهای i_1 و i_2 بستگی ندارند . L_{11} ضریب خود القای^(۱) سلف ①'① و L_{22} ضریب خود القای سلف ②'② است . M_{12} و M_{21} ضرایب القاء متقابل^(۲) برای سلفهای تزویج شده ①'① و ②'② نامیده می‌شوند . اگر جریانها برحسب آمپر و شارها برحسب وبر بیان شوند ، L_{11} ، L_{22} ، M_{12} و M_{21} برحسب هانری اندازه گیری میشوند . دوفیزیک ، از بررسی انرژی آموختیم که دوضریب القاء متقابل همیشه برابرند ، یعنی $M_{12} = M_{21}$. اگر مقدار مشترک آنها را M بنامیم میتوان نوشت :

$$(۱-۱) \quad \Phi_1 = L_{11}i_1 + Mi_2$$

$$(۱-۲) \quad \Phi_2 = Mi_1 + L_{22}i_2$$

از معادلات قانون فاراده بلافاصله نتیجه میشود :

$$(۱-۳) \quad v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

* ما لغت «سلف» را بجای «سیم‌پیچی» بکار می‌بریم تا نشان دهیم که با مدلهای مدار سروکار داریم . سیم‌پیچی‌ها عناصر فیزیکی را مشخص میکنند که معمولاً دارای مقداری اتلاف انرژی و ظرفیت پراکنده میباشند . میتوان سیم‌پیچی‌ها را از ترکیب سلف‌ها ، مقاومتها و خازنها مدل سازی نمود .

$$(۱-۴) \quad v_r = M \frac{di_1}{dt} + L_{rr} \frac{di_r}{dt}$$

در حالت دائمی سینوسی، اگر ولتاژها و جریانهای سینوسی v_1 ، v_r ، i_1 و i_r را به ترتیب با فازورهای متناظرشان V_1 ، V_r ، I_1 و I_r نشان دهیم، این معادلات بصورت زیر درسی آیند:

$$(۱-۵) \quad V_1 = j\omega L_{11} I_1 + j\omega M I_r$$

$$(۱-۶) \quad V_r = j\omega M I_1 + j\omega L_{rr} I_r$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای است.

تعبیر ۵- هرچند ضرایب خود القاء L_{11} و L_{rr} همواره اعداد مثبتی هستند، ضریب القای متقابل M ، بسته به اینکه سیم‌پیچی‌ها چگونه پیچیده شده باشند، میتواند مثبت و یا منفی باشد.

«علامت ضریب القاء متقابل» علامت ضریب القاء متقابل M را تنها میتوان با در نظر گرفتن دقیق وضع فیزیکی و جهات قرار دادی تعیین نمود. فرض کنید سلف دوم ①' ① را مدار باز کنیم، یعنی جریان i_r متعده با صفر است. معادلات (۱-۲) و (۱-۴) بصورت زیر درسی آیند:

$$\Phi_r = M i_1$$

و:

$$v_r = M \frac{di_1}{dt}$$

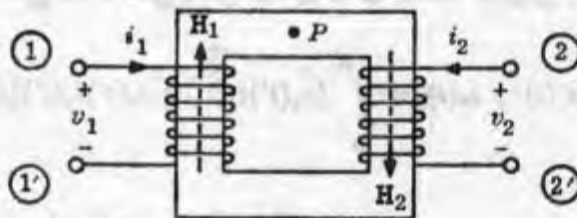
اگر یک جریان «افزایشی» از سر ① وارد سلف ۱ شود، در اینصورت $\frac{di_1}{dt} > 0$ میباشد و چون $v_r = M \left(\frac{di_1}{dt} \right)$ ، واضح است که علامت v_r با علامت M یکسان میباشد. مثلاً، ممکن است پتانسیل سر ① سلف ۲ از پتانسیل سر ①' بیشتر باشد. در این حالت، جهت قرار دادی ما لازم میدارد که $v_r > 0$ ، و بنابراین $M > 0$ باشد. بنابراین، علامت M هم به وضع فیزیکی «و هم» به جهت قرار دادی انتخاب شده بستگی دارد.

اکنون مسأله تعیین علامت M را با توجه به انرژی بررسی می‌کنیم. یک جفت سلف تزویج شده مشخص با جهات قرار دادی برای ولتاژ و جریان داده شده است. (شکل (۱-۲) را ببینید). فرض می‌کنیم که نفوذ پذیری مغناطیسی^(۱) هسته خیلی بیشتر از نفوذ پذیری مغناطیسی فضای آزاد باشد. تحت این شرایط، تقریباً تمام انرژی مغناطیسی در هسته ذخیره می‌شود. حال، می‌خواهیم براساس این داده‌ها، تعیین کنیم که علامت M در معادلات (۱-۳) و (۱-۴) بایستی مثبت باشد یا منفی.

با در نظر گرفتن انرژی مغناطیسی ذخیره شده در مواقعی که $i_1 > 0$ و $i_2 > 0$ است، به یک قاعده برای انتخاب علامت خواهیم رسید. در فیزیک آموختیم که هرگاه $\vec{H}$ بردار میدان مغناطیسی در یک نقطه P از هسته مغناطیسی باشد، در این صورت انرژی ذخیره شده در جزء حجم dv که شامل نقطه P است برابر $\frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 dv$ خواهد بود، که در آن μ نفوذ پذیری مغناطیسی هسته می‌باشد. فرض کنید با استفاده از مولدهای مناسبی، جریانهای ثابت و مثبت i_1 و i_2 را داشته باشیم و گیریم $\vec{H}_1$ میدان مغناطیسی ناشی از i_1 تنها، و $\vec{H}_2$ میدان مغناطیسی ناشی از i_2 تنها باشد. آنگاه انرژی مغناطیسی ذخیره شده در dv چنین است:

$$\frac{\mu}{2} |\vec{H}_1 + \vec{H}_2|^2 dv = \left(\frac{\mu}{2} |\vec{H}_1|^2 + \mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 + \frac{\mu}{2} |\vec{H}_2|^2 \right) dv$$

که در آن $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ نمایشگر حاصلضرب عددی دو بردار $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ می‌باشد.



شکل ۱-۲- تشریح تعیین علامت M

در این معادله $\frac{\mu}{\gamma} |\vec{H}_1|^2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از جریان i_1 تنها است و $\frac{\mu}{\gamma} |\vec{H}_2|^2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از جریان i_2 تنها است. پس، جمله $\mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از وجود توأم i_1 و i_2 است. بنابراین اگر $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ مثبت باشد (یعنی، قدر مطلق زاویه بین میدانهای مغناطیسی $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ از 90° کمتر باشد تا کسینوس آن مثبت گردد)، انرژی ذخیره شده در dv وقتی که i_1 و i_2 «همزمان» جاری شوند از مجموع انرژیهای ذخیره شده در dv وقتی که هریک از i_1 و i_2 بتنهایی جریان داشته باشند بزرگتر است. بعنوان مثال، در شکل (۱-۲)، قانون دست راست نشان میدهد که $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ جهت‌های یکسان دارند، بنابراین انرژی ذخیره شده در dv وقتی که هر دو i_1 و i_2 جریان داشته باشند، از مجموع انرژیهای ذخیره شده وقتی که i_1 و i_2 بتنهایی جریان داشته باشند «بزرگتر» است.

اکنون انرژی ذخیره شده را بدون در نظر گرفتن میدان و با در نظر گرفتن مدار محاسبه میکنیم. برای سادگی فرض کنید $i_1(0) = 0$ و $i_2(0) = 0$. بنابراین، بموجب معادلات (۱-۱) و (۱-۲)، در $t = 0$ شارها برابر صفر است و در لحظه $t = 0$ هیچ انرژی ذخیره نشده است. انرژی ذخیره شده تابعی از مقادیر لحظه‌ای i_1 و i_2 است و ما انرژی ذخیره شده در لحظه t را بصورت $\mathcal{E}[i_1(t), i_2(t)]$ مینویسیم. جهات قرار دادی متناظر لازم میدارند که $v_1(t)i_1(t)$ ، توان لحظه‌ای داده شده «بوسیله» محیط خارج «به» سلفی با سرهای ① و ①' بوده، و $v_2(t)i_2(t)$ ، توان لحظه‌ای داده شده «بوسیله» محیط خارج «به» سلفی با سرهای ② و ②' باشد. بنابراین:

$$\mathcal{E}[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t [v_1(t')i_1(t') + v_2(t')i_2(t')] dt'$$

از معادلات (۱-۳) و (۱-۴) بدست می‌آوریم که:

$$g[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t \left[L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt'} + M \left(i_1 \frac{di_2}{dt'} + i_2 \frac{di_1}{dt'} \right) + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt'} \right] dt'$$

چون $i_1(0)$ و $i_2(0)$ مساوی صفر فرض شده‌اند بدست می‌آوریم که :

$$(1-7) \quad g[i_1(t), i_2(t)] = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2(t)$$

این رابطه را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$(1-8) \quad g(i_1, i_2) = g(i_1, 0) + M i_1 i_2 + g(0, i_2)$$

که در آن $g(i_1, 0)$ انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_2 = 0$ باشد و جریان i_1 در سلف ۱ جاری شود، و $g(0, i_2)$ انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_1 = 0$ باشد و جریان i_2 در سلف ۲ جاری شود. از معادله (۱-۸) نتیجه می‌گیریم که اگر i_1 و i_2 مثبت بوده و $M > 0$ باشد، انرژی کل ذخیره شده از مجموع انرژیهای ذخیره شده در حالتی که به ترتیب جریان i_1 به تنهایی و جریان i_2 به تنهایی جاری شود، بزرگتر است. بدین ترتیب، صحت قاعده زیر را، برای تعیین علامت M ، بررسی کردیم :

«یک جفت سلف تزویج شده را در نظر گرفته جهات قراردادی برای ولتاژها و جریانها را چنان انتخاب می‌کنیم که توان داده شده به سلفها از محیط خارج مساوی $v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$ باشد. (انتخاب جهات قراردادی متناظر این مطلب را تضمین میکند). اگر یک جریان یک آمپری در هر سلف در جهت قراردادی عبور کند و اگر انرژی ذخیره شده در این شرایط از مجموع انرژیهای ذخیره شده در حالتی که هر یک از جریانهای یک آمپری به تنهایی عبور میکنند بزرگتر باشد، ضریب القاء متقابل M مثبت است.»

در دیاگرامهای مدار، اغلب از نقطه‌ها^(۱) بعنوان یک قرار داد برای نشان دادن

علامت M استفاده میشود. این قرارداد چنین است :

«ابتدا، برای هر سلف از جهات قراردادی متناظر استفاده کنید. سپس، به یک سر از هر سلف یک نقطه تخصیص دهید بقسمی که وقتی جهات قرارداد i_1 و i_2 هر دو از سر نقطه دار وارد سیم پیچی بشوند (یا از آن خارج گردند)، M مثبت باشد».

دروغ نشان داده شده در شکل (۱-۲)، برای جهات قرارداد داده شده به i_1 و i_2 ، ضریب القاء متقابل M مثبت است و بایستی دو نقطه در دوسر ① و ②، یا دوسر ③ و ④ گذاشته شود.

۱-۲- ضریب تزویج

برای توصیف روابط میان جریانها و شارها در سلفهای تزویج شده خطی و تغییر ناپذیر با زبان با دو سیم پیچی^(۱)، به سه پارامتر L_{11} ، L_{22} و M نیاز داریم. میدانیم که ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} همیشه مثبت هستند درحالیکه ضریب القاء متقابل M میتواند مثبت یا منفی باشد. نسبت قدر مطلق ضریب القاء متقابل به واسطه هندسی دو ضریب خود القاء، سنجشی برای درجهٔ تزویج میباشد. بنابراین، ضریب تزویج^(۱) سلفهای تزویج شده با دو سیم پیچی را با رابطه زیر تعریف میکنیم :

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

ضریب k یک عدد «نامنفی» است که به جهات قرارداد دادی انتخاب شده برای جریانهای سلفها بستگی ندارد. اگر دو سلف در فاصلهٔ زیادی از یکدیگر در فضا قرار داشته باشند، ضریب القاء متقابل بسیار کوچک است و k نزدیک صفر میباشد. اگر دو سلف شدیداً تزویج شده باشند، مانند حالتیکه دو سیم پیچی بر روی یک هسته پیچیده شده است، قسمت اعظم شار مغناطیسی برای دو سلف مشترک میباشد، و k نزدیک واحد است. با بررسی انرژی ذخیره شده در سلفها نشان خواهیم داد که ضریب تزویج k که در بالا تعریف شد،

همواره کوچکتر یا برابر واحد است. اگر این ضریب برابر واحد باشد، گویند که سلفها کاملاً تزویج شده‌اند^(۱).

اکنون عبارت انرژی ذخیره شده را که در معادله (۱-۷) داده شده است بررسی میکنیم. از روش جبری کامل کردن مربعات استفاده خواهیم کرد، در این صورت:

$$\begin{aligned} g(i_1, i_2) &= \frac{1}{r} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{r} L_{22} i_2^2 \\ &= \frac{1}{r} L_{11} \left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2 + \frac{1}{r} \left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) i_2^2 \end{aligned}$$

توجه کنید که برای هر مقدار i_1 و i_2 ، جمله $\left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2$ همواره نامنفی است. بخاطر بیاورید که انرژی $g(i_1, i_2)$ ذخیره شده در سلفهای تزویج شده بایستی برای «هر» انتخاب i_1 و i_2 نامنفی باشد. بنابراین، نتیجه می‌شود که $L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}$ بایستی نامنفی باشد. اثبات این مطلب بطریقه برهان خلف^(۲) میباشد.

فرض کنید $L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}$ منفی باشد و گیریم که $i_2 = 1$ و $i_1 = -\frac{M}{L_{11}}$ انتخاب شود. در این صورت $\left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2$ صفر میشود و $\left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) i_2^2$ منفی است، و ما به نتیجه غیر ممکن $g\left(-\frac{M}{L_{11}}, 1\right) < 0$ میرسیم. و بالتجیه این شرط را خواهیم داشت:

$$L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \geq 0$$

و این رابطه با $L_{11} L_{22} \geq M^2$ معادل است، و یا:

$$(۱-۹) \quad k = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \leq 1$$

بطور خلاصه، بررسی انرژی لازم میدارد که ضرایب خود القاء یک جفت سلف خطی تزویج

شده مثبت بوده و ضریب تزویج آنها کوچکتر یا برابر واحد باشد.

۱-۳- سلفهای با چند سیم‌پیچی و ماتریس ضرایب القاء آنها

اگر بیش از دو سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان بایکدیگر تزویج شوند، مانند آنچه در شکل (۱-۳) نشان داده شده است، رابطه میان جریانها و شارها بوسیله یک دسته از معادلات خطی، بصورت زیر داده میشود:

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$

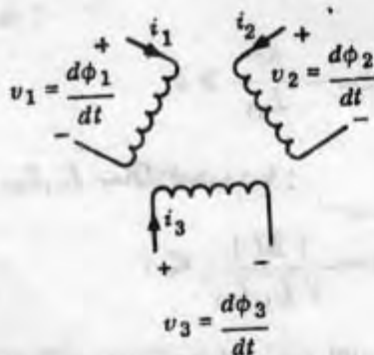
$$\Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3 \quad (۱-۱۰ \text{ الف})$$

$$\Phi_3 = L_{31}i_1 + L_{32}i_2 + L_{33}i_3$$

در معادلات (۱-۱۰ الف)، L_{11} ، L_{22} و L_{33} بترتیب ضرایب خود القاء سلفهای ۱، ۲ و ۳ میباشند. $L_{12} = L_{21}$ و $L_{23} = L_{32}$ و $L_{13} = L_{31}$ ضرایب القاء متقابل هستند. عبارت دقیق‌تر، L_{12} ضریب القاء متقابل بین سلف ۱ و سلف ۲ را نشان میدهد. گاهی راحت‌تر است که معادله (۱-۱۰ الف) را بصورت ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\Phi = \mathbf{L} \mathbf{i} \quad (۱-۱۰ \text{ ب})$$

که در آن Φ بردار شار و $\mathbf{i}$ بردار جریان نامیده میشود، و $\mathbf{L}$ یک ماتریس مربعی



شکل ۱-۳- سلفهای با سه سیم‌پیچی

است که ماتریس ضرایب القاء^(۱) نامیده میشود. بنابراین :

$$(۱-۱۰) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

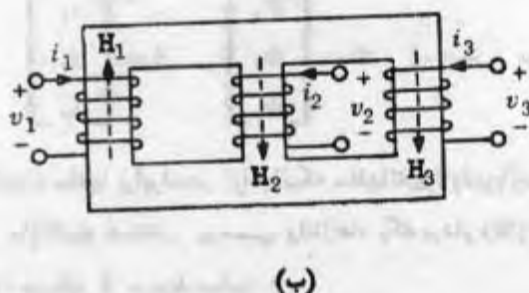
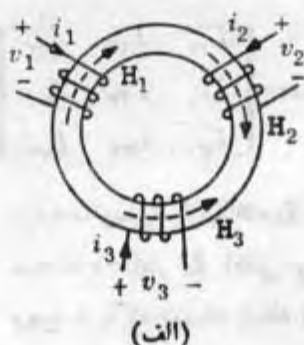
مرتبه ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ با تعداد سلفها برابر است. از آنجائیکه سلفها تغییرناپذیر با زمان میباشند، عناصر $\mathbf{L}$ (یعنی L_{ij} ها) ثابت هستند. برحسب ولتاژها، یک بردار ولتاژ $\mathbf{v}$ وجود دارد که بوسیله رابطه زیر به جریان $\mathbf{i}$ مربوط میشود :

$$(۱-۱۱) \quad \mathbf{v} = \mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

از آنجائیکه ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ همواره متقارن است ($L_{12} = L_{21}$ و غیره)، دسته‌ای از سلفهای تزویج شده با سه سیم پیچی، بجای نه پارامتر، بوسیله شش پارامتر مشخص میشوند. علامتهای ضرایب القاء متقابل L_{12} ، L_{13} و L_{23} را میتوان با بررسی جهت میدان مغناطیسی القاء شده تعیین کرد.

مثال ۱-۱ = شکل (۱-۴ الف) سه سلف را که روی یک هسته آهنی پیچیده شده‌اند نشان میدهد. جهت قرار دادی ولتاژ و جریان برای این سه سلف را مطابق شکل انتخاب میکنیم. جهت میدانهای مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریانهای مثبتی که از سلفها میگذرند را میتوان بوسیله قانون دست راست تعیین نمود. بعنوان مثال، پیکان مشخص شده با علامت $\vec{H}_1$ جهت میدان مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریان مثبت i_1 راوتنیکه $i_2 = i_3 = 0$ است نشان میدهد. چنانکه در شکل نشان داده شده است $\vec{H}_2$ و $\vec{H}_1$ دارای جهات یکسان هستند ولی $\vec{H}_3$ جهت مخالف دارد. بنابراین L_{12} مثبت میباشد درحالیکه L_{13} و L_{23} منفی هستند.

تمرین - در سلفهای تزویج شده با سه سیم پیچی شکل (۱-۴ ب)، علامتهای ضرایب القاء متقابل L_{12} ، L_{13} و L_{23} را تعیین کنید.



شکل ۴-۱- مثالهایی از سلفهای تزویج شده با سه سیم‌پیچی

در اینجا مفید است که یک ماتریس ضرایب القاء معکوس^(۱) را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\Gamma \triangleq \mathbf{L}^{-1}$$

با این تعریف، معادله (۱-۱۰) بدین صورت درمی‌آید:

$$\mathbf{i} = \Gamma \Phi \quad (1-12)$$

بعنوان مثال، معادلات اسکالر برای سلفهای تزویج شده با دو سیم‌پیچی برحسب عناصر ماتریس ضرایب القاء معکوس چنین می‌باشند:

$$(1-13) \quad \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 \\ i_2 = \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\Phi_2 \end{cases}$$

که در آن، از تعریف یک ماتریس معکوس و یا از قاعده کرامر، داریم:

$$(1-14) \quad \Gamma_{11} = \frac{L_{22}}{\det \mathbf{L}}, \quad \Gamma_{22} = \frac{L_{11}}{\det \mathbf{L}}$$

و:

$$(1-14) \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{-L_{12}}{\det \mathbf{L}}$$

که در آن $\det \mathbf{L}$ نشان دهندهٔ دترمینان ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ میباشد. Γ_{ij} ها ضرایب القاء معکوس نامیده میشوند. معادلهٔ (۱-۱۳) برحسب ولتاژها چنین میشود:

$$i_1(t) = \Gamma_{11} \int_0^t v_1(t') dt' + \Gamma_{12} \int_0^t v_2(t') dt' + i_1(0)$$

(۱۰-۱ الف)

$$i_2(t) = \Gamma_{21} \int_0^t v_1(t') dt' + \Gamma_{22} \int_0^t v_2(t') dt' + i_2(0)$$

این معادلات، در هر لحظهٔ t ، جریانهای سلفها را برحسب ولتاژها و جریانهای اولیه بیان میکنند. باین دلیل، در تجزیه و تحلیل گره، ماتریس ضرایب القاء معکوس از ماتریس ضرایب القاء مفیدتر است.

در حالت دائمی سینوسی، میتوان فازورهای جریان I_1 و I_2 را برحسب فازورهای

ولتاژ V_1 و V_2 بدین صورت نوشت:

$$I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} V_2$$

(۱۰-۱ ب)

$$I_2 = \frac{\Gamma_{21}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} V_2$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای است.

تبصره - بعنوان آخرین مطلب، بایستی تأکید نمود که ماتریس ضرایب القاء بخودی خود رفتار ولتاژ و جریان شاخه‌ها را بطور کامل مشخص نمیکند، و برای آنکه بتوان معادلات شبکه را بطور صحیح نوشت باید ماتریس ضرایب القاء و جهات قراردادی جریانهای سلفها، «هر دو»، را بدانیم. جهات قراردادی ولتاژها از قرار داد قبلی ما دربارهٔ اینکه هر وقت جهات قراردادی متناظر را بکار ببریم، توان داده شده «بوسیلهٔ» محیط خارج «به» سلفها، مساوی $v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$ میباشد، نتیجه میشود.

۴-۱- اتصال سری و موازی سلفهای تزویج شده

اکنون توجه خود را به مسأله محاسبه ضریب القاء^(۱) معادل دو سلف خطی تزویج شده که بطور سری یا موازی بهم وصل شده‌اند معطوف می‌داریم.

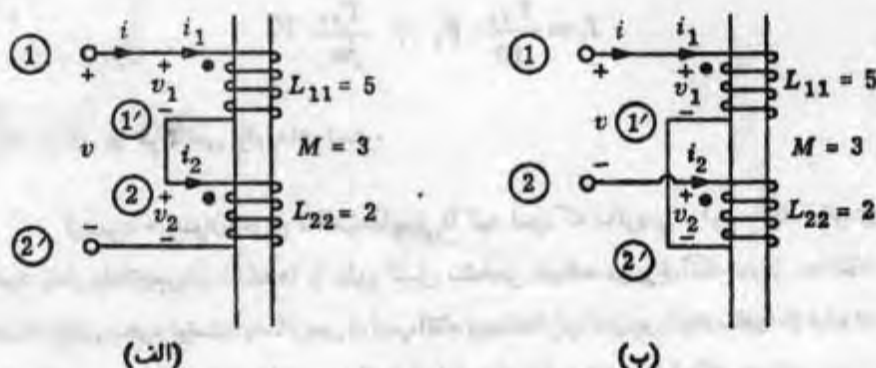
مثال ۲- شکل (۱-۵) دو سلف تزویج شده که بطور سری بهم متصل شده‌اند را نشان می‌دهد. برای تعیین ضریب القاء بین سرهای ① و ①'، ابتدا علامت ضریب القاء متقابل را تعیین می‌کنیم. از جهت‌های قراردادی انتخاب شده برای دو جریان i_1 و i_2 مشاهده می‌شود که میدانهای مغناطیسی $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ ، به ترتیب ناشی از جریانهای i_1 و i_2 ، هم جهت هستند و این موجب مثبت بودن M می‌گردد. (قرار داد نقطه را هم میتوان بکار برد، چون هر دو جریان i_1 و i_2 از سر نقطه دار وارد سلف می‌شوند، M مثبت است). از معادلات جریان و شار، داریم:

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + Mi_2 = 5i_1 + 3i_2$$

(۱-۱۶)

$$\Phi_2 = Mi_1 + L_{22}i_2 = 3i_1 + 2i_2$$

که در آن ضرایب القاء برحسب هائری بیان شده‌اند. چون دو سلف بطور سری بهم متصل شده‌اند، KCL لازم می‌دارد که:



شکل ۵-۱- اتصال سری سلفهای تزویج شده

$$i = i_1 = i_2$$

KVL لازم می‌دارد که $v = v_1 + v_2$ ، و قانون فاراده بیان می‌دارد که $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و

$v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$. بنابراین، اگر Φ شاری باشد که $v = \frac{d\Phi}{dt}$ برقرار گردد، بدست می‌آید:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt}$$

و اگر شارهای اولیه برابر صفر باشند، با انتگرال گیری بدست می‌آید:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

و از معادله (۱-۱۶) داریم:

$$\Phi = 8i_1 + 5i_2 = 13i$$

بنابراین، ضریب القاء اتصال سری چنین است:

$$L = \frac{\Phi}{i} = 13 \text{ هانری}$$

اکنون فرض کنید که دوسلف را مطابق شکل (۱-۵ ب) بهم وصل کنیم. سر ۱' سلف اول به سر ۱' سلف دوم وصل شده است. برای تعیین ضریب القاء اتصال سری بین سرفای ۱ و ۱'، از KCL مشاهده می‌کنیم که:

$$i = i_1 = -i_2$$

KVL لازم می‌دارد که $v = v_1 - v_2$. از آنجائیکه $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$

است، با قرار دادن $v = \frac{d\Phi}{dt}$ بدست خواهیم آورد:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt}$$

مجدداً فرض می‌کنیم که شارهای اولیه برابر صفر باشند. با انتگرال گیری بدست می‌آید:

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 2i_1 + i_2 = i$$

بنابراین ضریب القاء اتصال سری در شکل (۱-۵) ب) چنین است :

$$L = \frac{\Phi}{i} = 1 \quad \text{هائری}$$

«در نتیجه»، ضریب القاء اتصال سری دو سلف تزویج شده پسادی با قاعده زیر بدست می‌آید :

$$L = L_{11} + L_{22} \pm 2 |M|$$

که در آن، علامت مثبت وقتی برقرار است که شارهای ایجاد شده در اثر جریان مشترک در هر سلف جهات یکسان داشته باشند، و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهات مخالف داشته باشند.

مثال ۳- در شکل (۱-۶)، دو سلف را بطور موازی وصل می‌کنیم. برای تعیین

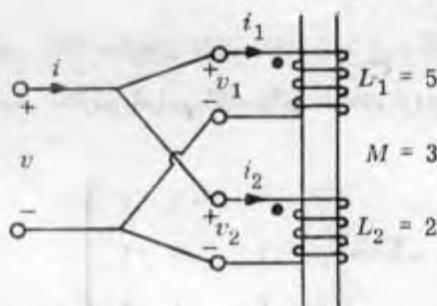
ضریب القاء اتصال موازی ساده‌تر است که ضریب القاء معکوس سلفهای تزویج شده را بدست آوریم تا ضریب القاء معکوس اتصال موازی را از روی آنها محاسبه کنیم. ضرایب القاء معکوس، از معادله (۱-۱۴)، چنین هستند :

$$\Gamma_{11} = \frac{2}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = 2 \quad \Gamma_{22} = \frac{0}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = 0$$

ضریب القاء متقابل معکوس با Γ_{12} نشان داده میشود و مقدار آن چنین است :

$$\Gamma_{12} = \frac{-2}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = -2$$

معادلات جریان و شار چنین هستند :



شکل ۶-۱- مثال ۳ : اتصال موازی سلفهای تزویج شده

$$i_1 = \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 = 2\Phi_1 - 2\Phi_2$$

$$i_2 = \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\Phi_2 = -2\Phi_1 + 5\Phi_2$$

با مراجعه به شکل (۶-۱) مشاهده میکنیم که KVL لازم میدارد :

$$v_1(t) = v_2(t) \quad \text{برای همه } t$$

اگر فرض کنیم : $i_1(0) = \Phi_1(0) = 0$ و $i_2(0) = \Phi_2(0) = 0$ باشد ، با انتگرال گیری ولتاژها بدست می آید :

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) \quad \text{برای همه } t$$

اگر مقدار مشترك Φ_1 و Φ_2 را Φ بنامیم ، از روابط میان شار و جریان داریم :

$$i = i_1 + i_2 = -\Phi_1 + 2\Phi_2 = \Phi$$

بنابراین ، ضریب القاء اتصال موازی شکل (۶-۱) چنین است :

$$L = \frac{\Phi}{i} = 1 \quad \text{هائری}$$

«در نتیجه» ، ضریب القاء معکوس اتصال موازی دو سلف تزویج شده باقاعده زیر داده

میشود :

$$\Gamma = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} \pm 2 | \Gamma_{12} |$$

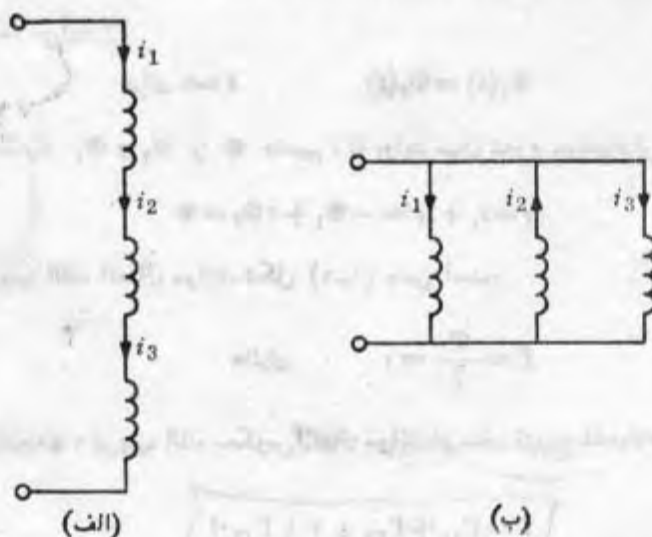
که در آن علامت مثبت وقتی برقرار است که شارهای بوجود آمده از جریان هرسلف (ناشی از ولتاژ مشترك v) جهت های مخالف داشته باشند ، و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهت های یکسان داشته باشند .

تمرین - ضرایب القاء مدارهای نشان داده شده در شکل‌های (۱-۷ الف) و (۱-۷ ب) را محاسبه کنید. ماتریس ضرایب القاء برای سلف‌های تزویج شده با سه سیم‌پیچی چنین است :

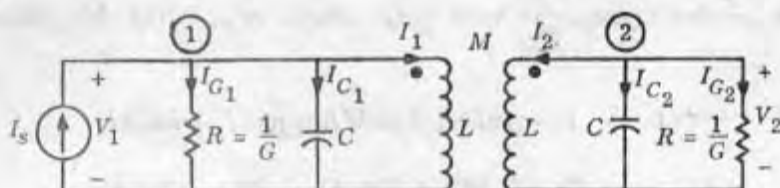
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

۱-۵- مدار تطبیق شده مضاعف

یک مدار بسیار مفید که در سیستم‌های ارتباطی بکار میرود مدار تطبیق شده مضاعف^(۱) شکل (۱-۸) می‌باشد. ما تجزیه و تحلیل ساده شده‌ای از این مدار را بیان خواهیم کرد تا طرز بکار بردن تجزیه و تحلیل گره در یک مدار با سلف‌های تزویج شده را نشان دهیم و همچنین مفروضه‌های حالت دائمی فصل هفتم را مرور کنیم. دو مدار تشدید موازی بطور مغناطیسی تزویج شده‌اند. برای سادگی فرض می‌کنیم



شکل ۱-۷- اتصالات سری و موازی سلف‌های تزویج شده با سه سیم‌پیچی



شکل ۱-۸ - مدار تطبیق شده مضاعف

که دو مدار تشدید همانند باشند. ماتریس ضرایب القاء سلفهای تزویج شده بصورت زیر داده شده است:

$$(۱-۱۷) \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & L \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن k ضریب تزویج، و M مثبت است (داده‌های شکل (۱-۸) را ببینید). در تجزیه و تحلیل گره ساده‌تر است که از ماتریس ضرایب القاء معکوس استفاده شود:

$$(۱-۱۸) \quad \Gamma = \mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{(1-k^2)L} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

اگر فرض کنیم ورودی یک سینوسی باشد:

$$i_s(t) = \text{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

در این صورت، خروجی حالت دائمی سینوسی، یک ولتاژ $v_r(t)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$v_r(t) = \text{Re}(V_r e^{j\omega t})$$

میخواهیم برای تمام ω ، پاسخ حالت دائمی سینوسی را تعیین کنیم. یعنی میخواهیم تابع شبکه را تعیین نمائیم:

$$(۱-۱۹) \quad H(j\omega) = \frac{V_r}{I_s}$$

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی، ما از نمایش فازوری برای تمام جریانها و ولتاژهای شاخه‌ها استفاده می‌کنیم. از معادلات (۱-۵)، (۱-۶) و (۱-۹)، رابطه میان فازورهای

جریان و فازورهای ولتاژ، برای سلفهای تزویج شده با دوسیم پیچی، بسادگی چنین است:

$$(۲۰-۱) \quad V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega L I_1 + j\omega L k I_2$$

$$(۲۰-۲) \quad V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega L k I_1 + j\omega L I_2$$

که در آن V_1 و V_2 فازورهای ولتاژ در دو سر دو مدار تشدید میباشند، و I_1 و I_2 فازورهای جریان داخل سلفها هستند. با استفاده از معادلات (۱۵-۱) و (۱۸-۱)، برحسب ضرایب القاء معکوس بدست می‌آوریم:

$$(۲۱-۱) \quad$$

$$I_1 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_{11} V_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_{12} V_2 = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} (V_1 - k V_2)$$

$$(۲۱-۲) \quad$$

$$I_2 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_{21} V_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_{22} V_2 = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} (-k V_1 + V_2)$$

در تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی، دو فازور ولتاژ گره V_1 و V_2 را بعنوان متغیرهای شبکه انتخاب میکنیم و معادلات KCL را برحسب فازورهای جریان در دو گره ① و ② مینویسیم. در گره ① داریم:

$$I_{G_1} + I_{C_1} + I_1 = I_s$$

که در آن:

$$I_{G_1} = G V_1 \quad I_{C_1} = j\omega C V_1$$

و I_1 توسط معادله (۲۱-۱) داده شده است. برحسب فازورهای ولتاژ داریم:

$$(۲۲-۱) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} \right] V_1 - \frac{k}{j\omega L(1-k^2)} V_2 = I_s$$

و در گره ② داریم:

$$I_2 + I_{C_2} + I_{G_2} = 0$$

که در آن :

$$I_{C_T} = j\omega C V_T \quad I_{G_T} = G V_T$$

و I_T توسط معادله (۱-۲۱) ب داده شده است. برحسب فازورهای ولتاژ داریم :

$$(1-23) \quad -\frac{k}{j\omega L(1-k^2)} V_1 + \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} \right] V_T = 0$$

بنابراین دو معادله خطی جبری با ضرایب مختلط (۱-۲۲) و (۱-۲۳) را برحسب دو مجهول V_1 و V_T داریم. فازور ولتاژ خروجی V_T را میتوان، بلافاصله، طبق قاعده کرامر، برحسب فازور جریان ورودی I_s حل نمود. باوجود این، به علت متقارن بودن مدار و معادلات، روش ساده تری برای حل این معادلات وجود دارد. دو متغیر جدید را چنین تعریف می کنیم :

$$(1-24) \quad 2V_+ = V_1 + V_T \quad 2V_- = V_1 - V_T$$

یا :

$$(1-25) \quad V_1 = V_+ + V_- \quad V_T = V_+ - V_-$$

با جمع کردن معادلات (۱-۲۲) و (۱-۲۳) بدست می آید :

$$(1-26) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1+k)} \right] V_+ = \frac{I_s}{2}$$

با تفریق کردن (۱-۲۲) از (۱-۲۳) بدست می آید :

$$(1-27) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k)} \right] V_- = \frac{I_s}{2}$$

معادلات (۱-۲۶) و (۱-۲۷) درست بهمان صورت معادلات دو مدار تشدید RLC موازی تنها، به ترتیب با ضرایب القاء $L(1+k)$ و $L(1-k)$ ، میباشند. از آنجا که فازور ولتاژ خروجی $V_T = V_+ - V_-$ است، میتوان آنرا بعنوان اختلاف دو فازور خروجی دو مدار تشدید مختلف که تزویج نشده اند در نظر گرفت.

اکنون، برای ساده کردن نتایج، فرکانس های تشدید و ضرایب کیفیت دو مدار تشدید تنها را معرفی می کنیم. گیریم :

$$(1-28) \quad \omega_+^r = \frac{1}{LC(1+k)} \quad \omega_-^r = \frac{1}{LC(1-k)}$$

که در آن $\omega_+ < \omega_-$ است. گیریم:

$$(1-29) \quad Q_+ = \omega_+ CR \quad Q_- = \omega_- CR$$

در این صورت، از (۱-۲۶) و (۱-۲۷) نتیجه می‌شود که:

$$(1-30) \quad V_+ = \frac{1}{2} I_s R \frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)}$$

و:

$$(1-31) \quad V_- = \frac{1}{2} I_s R \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)}$$

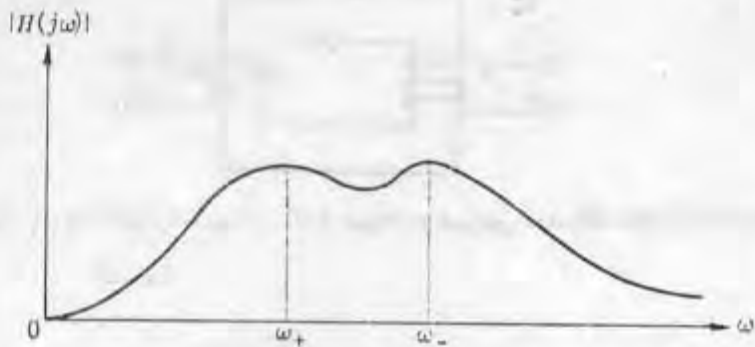
بنابراین، فازور ولتاژ خروجی چنین است:

$$(1-32) \quad V_r = \frac{1}{2} I_s R \left[\frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)} - \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)} \right]$$

و تابع شبکه چنین است:

$$(1-33) \quad H(j\omega) = \frac{V_r}{I_s} = \frac{1}{2} R \left[\frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)} - \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)} \right]$$

اگر ضرایب کیفیت Q_+ و Q_- خیلی بزرگتر از واحد بوده و ضریب تزویج کوچک باشد، تابع شبکه داده شده در معادله (۱-۳۳) را می‌توان باز هم ساده‌تر نمود. معه‌ذا، برای بدست آوردن فرمولهای ساده شده اقدامی نخواهیم کرد. تنها می‌خواهیم خاطرنشان کنیم که مدار تطبیق شده مضاعف می‌تواند پهنای باند عرض‌تری از مدار تشدید می‌کننده در



شکل ۹-۱- منحنی اندازه نوعی یک مدار تطبیق شده مضاعف

فصل قبل بررسی کردیم ایجاد نماید. منحنی اندازه نوعی $|H(j\omega)|$ در شکل (۹-۱) نشان داده شده است. نوکهای منحنی تقریباً متناظر با ω_+ و ω_- ، دو مدار RLC تشدید تنها، که در معادله (۱-۲۸) تعریف شدند، میباشدند.

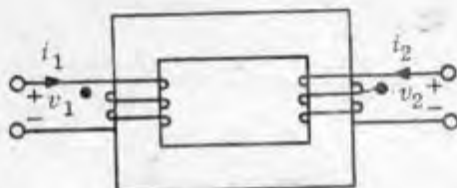
۲- ترانسفورماتورهای ایده آل

ترانسفورماتور ایده آل نمایش ایده آلی ترانسفورماتورهای فیزیکی است که در بازار موجود است. با توجه به چنین ترانسفورماتورهای فیزیکی، ترانسفورماتور ایده آل با سه فرض ایده آل سازی زیر مشخص میشود:

- (۱) ترانسفورماتور ایده آل انرژی تلف نمیکند.
 - (۲) دارای هیچگونه شارنشستی^(۱) نیست، یعنی ضریب تزویج برابر واحد است.
 - (۳) ضریب خود القاء هرسیم پیچی بینهایت است.
- ترانسفورماتور ایده آل مدل بسیار مفیدی از نظر محاسبات مدار میباشد چون با وصل کردن چند عنصر اضافی (G ، L ، R) به سرهای آن میتوان با دقت مناسبی رفتار سرهای ترانسفورماتور فیزیکی را نمایش داد.

۲-۱- ترانسفورماتور ایده آل با دو سیم پیچی

اکنون بطور حسی نشان میدهم که چگونه از پیچیدن دو سیم پیچی بر روی یک هسته مغناطیسی، مطابق شکل (۲-۱)، و با بینهایت قرارداد دادن ضریب نفوذ مغناطیسی، یک ترانسفورماتور ایده آل بدست می آید. فرض میکنیم که سیم پیچی هادارای اتلاف و ظرفیت



شکل ۱-۲ = یک ترانسفورماتور که از پیچیدن دو سیم‌پیچی روی یک هسته مشترک بدست آمده است .

پراکنده (۱) نباشند . برای ساده کردن بررسی‌های بعدی ، جهات قرار دادی برای جریانها را طوری اختیار میکنیم که ضریب القاء متقابل مثبت باشد . اگر ضریب نفوذ مغناطیسی هسته بینهایت باشد ، دراین صورت تمام میدان مغناطیسی در هسته محبوس خواهد بود و هر خط القاء مغناطیسی که از یک حلقه سیم‌پیچی ۱ بگذرد ، از یکایک حلقه‌های سیم‌پیچی ۲ خواهد گذشت . بنابراین ، اگر Φ شار گذرنده از یک سیم‌پیچی با یک حلقه که در محلی دلخواه روی هسته قرار دارد باشد ، و n_1 و n_2 ترتیب تعداد دورهای سیم‌پیچی‌های ۱ و ۲ باشند ، دراین صورت شار کل Φ_1 و Φ_2 که به ترتیب از سیم‌پیچی‌های ۱ و ۲ میگذرد چنین است :

$$\Phi_1 = n_1 \Phi \quad \text{و} \quad \Phi_2 = n_2 \Phi$$

چون $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ است ، برای تمام زمانهای t و تمام ولتاژهای v_1 و v_2 داریم :

$$(۱-۲) \quad \boxed{\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}}$$

اکنون به محاسبه Φ برحسب «نیروی محرکه مغناطیسی» (mmf) و رلوکتانس مغناطیسی « $\mathcal{R}$ » (۲) توجه کنید . مشابه قانون اهم برای یک مقاومت خطی ، رلوکتانس $\mathcal{R}$ ،

نیروی محرکه مغناطیسی و شار Φ را با رابطه زیر بهم ارتباط میدهد:

$$\text{mmf} = \mathcal{R}\Phi$$

با توجه به فرض ما در مورد انتخاب جهات قرار دادی برای جریانهای i_1 و i_2 ، mmf با $n_1 i_1 + n_2 i_2$ برابر است، و بنابراین:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi$$

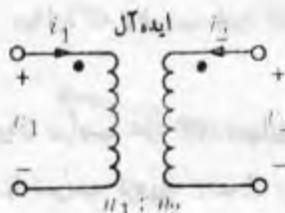
اکنون اگر نفوذ پذیری مغناطیسی بینهایت شود، $\mathcal{R}$ صفر میگردد، چون رلوکتانس با μ تناسب معکوس دارد. واضح است که:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

یا، برای تمام t و تمام جریانهای i_1 و i_2 :

$$(2-2) \quad \boxed{\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

معادلات (۲-۱) و (۲-۲) بعنوان معادلات «تعریف کننده» دوترانسفورماتور ایده آل انتخاب می شوند. بنابراین، هر موقع که اصطلاح ترانسفورماتور ایده آل با دو سیم پیچی را بکار میبریم، منظور ما یک دستگاه دو قطبی خواهد بود که معادلات ولتاژ و جریان آن (۲-۱) و (۲-۲) میباشند. بخصوص، به علامت منفی در (۲-۲) توجه کنید. در دیگرام های مداری، ترانسفورماتورهای ایده آل با مدار نشان داده شده در شکل (۲-۲) نمایش داده میشود.



شکل ۲-۲- ترانسفورماتور ایده آل، مطابق تعریف،

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$

تبصره ۱- چون معادلات (۲-۱) و (۲-۲) را میتوان بصورت «توابع خطی» که v_1 را بر حسب v_2 و i_1 را بر حسب i_2 بیان میکنند تعبیر نمود و چون ضرایب n_1 و n_2 به زمان بستگی ندارند، از این جهت ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر مدار «خطی تغییر ناپذیر با زمان» میباشد.

تبصره ۲- از (۲-۱) و (۲-۲)، برای تمام جریانها و ولتاژها و برای تمام t داریم:

$$v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0 \quad (2-3)$$

بنابراین، در تمام لحظات، مجموع توانهای ورودی از هر قطب برابر صفر است. هیچ انرژی ذخیره نمیشود، و هیچ انرژی تلف نمیکردد. همانقدر توان که از یک جفت سر وارد ترانسفورماتور میشود، از جفت سر دیگر خارج میگردد. این حقایق، اغلب با گفتن اینکه ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر «بی اتلاف و بدون ذخیره انرژی» است، و بنابراین بدون حافظه میباشد، مشخص میشوند. توجه کنید که خازن‌ها و سلف‌ها وجفت‌هایی از سلف‌ها با تزویج متقابل، (حتی وقتی که $k=1$ است) نیز عناصر بی‌اتلاف میباشند، ولی، انرژی ذخیره «میکند».

تبصره ۳- از (۲-۱)، ولتاژ v_1 دوسر سیم پیچی ۱ به i_1 یا به i_2 بستگی ندارد و تنها به v_2 بستگی دارد. بطریق مشابه، از (۲-۲)، جریان i_1 تنها به i_2 بستگی دارد، و از v_1 و v_2 مستقل است. بخصوص، اگر میخواستیم ضریب خود القاء سلف ۱ را اندازه‌گیری کنیم (پس سلف ۲ مدار باز بوده، بنابراین $i_2=0$ است)، آنگاه معادله (۲-۲) لازم میدارد که ولتاژ v_1 اعمال شده به سلف ۱ هر چه قدر که باشد، بطور متحد $i_1(t)=0$ برقرار باشد. این حقیقت لازم میدارد که «ضریب خود القاء هر سلف یک ترانسفورماتور ایده‌آل بینهایت باشد».

تبصره ۴- علاوه بر دارا بودن ضرایب خود القاء بینهایت، یک ترانسفورماتور ایده‌آل با دوسیم پیچی، یک جفت سلف با ضریب تزویج $k=1$ میباشد. انرژی ذخیره شده برای سلف‌های تزویج شده را میتوان بصورت زیر نوشت: (معادله (۱-۷) را ببینید):

$$\begin{aligned}
 g(i_1, i_2) &= \frac{1}{\gamma} (L_{11}i_1^2 + 2\sqrt{L_{11}L_{22}}i_1i_2 + L_{22}i_2^2) \\
 &\quad + \left(\frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} - 1 \right) \sqrt{L_{11}L_{22}} i_1i_2 \\
 &= \frac{1}{\gamma} (\sqrt{L_{11}} i_1 + \sqrt{L_{22}} i_2)^2 + (k-1) \sqrt{L_{11}L_{22}} i_1i_2
 \end{aligned}$$

در نتیجه معادله (۲-۳)، برای یک ترانسفورماتور ایده آل، g متحد با صفر است. بنابراین:

$$k=1 \quad (2-4)$$

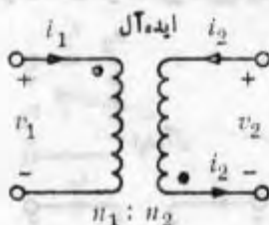
و:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{\sqrt{L_{22}}}{\sqrt{L_{11}}}$$

توجه کنید که معادله آخر با (۲-۲) سازگار است چون L_{22} و L_{11} به ترتیب با n_2^2 و n_1^2 متناسب هستند.

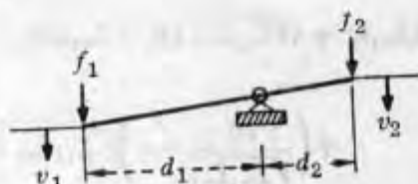
تبصره ۵- در نتیجه انتخاب جهات قرار دادی ما، معادلات (۲-۱) و (۲-۲) دارای علامتهای نشان داده شده هستند. اگرما جهات قرار دادی را مطابق شکل (۲-۳) انتخاب کنیم (توجه کنید که i_2 از طرف سرفقطه گذاری شده از سیم پیچی خارج میشود)، معادلات چنین میشوند:

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۲-۳ = ترانسفورماتور ایده آل، با توجه به محل نقاط،

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۴-۲- تشابه مکانیکی یک ترانسفورماتور ایده‌آل با

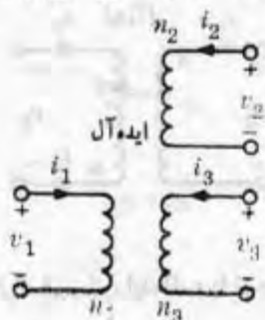
$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{d_1}{d_2} \quad \text{و} \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

تبصره ۲- ترانسفورماتور ایده‌آل مشابه الکتریکی یک اهرم مکانیکی است که از یک لولای بدون مالش و یک میله بی‌جرم و فوق‌العاده سخت تشکیل شده باشد. (شکل (۲-۴) را ببینید). واضح است که با چنین فرضیه‌ای، روابط میان نیروهای f و سرعت‌های v چنین است:

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{d_2}{d_1} \quad \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = -\frac{d_1}{d_2}$$

نداشتن مالش متناظر با نبودن اتلاف انرژی در ترانسفورماتور ایده‌آل می‌باشد. فوق‌العاده سخت بودن میله با فرض نداشتن ظرفیت پراکنده در ترانسفورماتور ایده‌آل متناظر است، و بی‌جرم بودن میله متناظر با نداشتن انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ترانسفورماتور ایده‌آل می‌باشد.

تبصره ۷- بعنوان آخرین توضیح، بایستی تذکر داد که میتوان ترانسفورماتورهای باچندسیم پیچی در نظر گرفت. بعنوان مثال، ترانسفورماتورها با یک هسته سه سیم پیچی (شکل (۲-۵))



شکل ۵-۲- یک ترانسفورماتور ایده‌آل با سه سیم پیچی

را در نظر بگیرید. معادلات آن چنین هستند:

$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} = \frac{v_3}{n_3} \quad n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = 0$$

این ترانسفورماتور ایده‌آل با یک هسته و سه سیم پیچی، بازهم یک عنصر «خطی تغییر ناپذیر با زمان، و بی اتلاف و بدون ذخیره انرژی است».

۲-۲- خواص تغییر دهنده گی امپدانس

۱- یک بار مقاومتی^(۱) با مقاومت R_L که به سیم پیچی ثانویه^(۲) یک ترانسفورماتور ایده‌آل، مطابق شکل (۲-۶)، متصل است را در نظر بگیرید. مقاومت ورودی چنین است:

$$R_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)v_2}{-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)i_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{v_2}{-i_2}\right)$$

اما:

$$v_2 = -R_L i_2$$

بنابراین:

$$(2-5) \quad R_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L$$

۲- اکنون رفتار حالت دائمی سینوسی مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۲-۷) را در نظر می گیریم. بار، یک امپدانس یک قطبی $Z_L(j\omega)$ است،

$$(2-6) \quad Z_{in}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{V_2}{-I_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_L(j\omega)$$

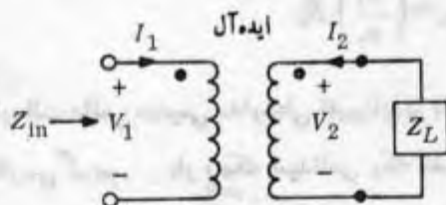
معادلات (۲-۵) و (۲-۶) تعبیر جالبی دارند. بدین معنی، که ترانسفورماتورهای



شکل ۶-۲- مقاومت ورودی یک ترانسفورماتور ایده‌آل ختم شده با :

$$R_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 R_L$$

ایده‌آل امپدانس ظاهری^(۱) یک بار را تغییر می‌دهند و میتوان آنها را برای تطبیق امپدانس مدارهای با امپدانس متفاوت بکاربرد. بعنوان مثال، امپدانس ورودی یک بلندگو معمولاً در حدود ۸ اهم است که برای اتصال مستقیم به بسیاری از تقویت کننده‌هایی که با لاسپ‌خلاء ویاترانزیستور کار میکنند، و امپدانس خروجی مثلاً ۸۰۰ اهم دارند، مقدار بسیار کوچکی است. اگر یک ترانسفورماتور بین خروجی تقویت کننده قدرت و ورودی بلندگو قرار داده شود، و نسبت دورها چنان انتخاب گردد که تفاوت امپدانس بین خروجی تقویت کننده و ورودی بلندگو را ترمیم کند، تقویت کننده امپدانس مناسبی برای بکار



شکل ۷-۲- امپدانس ورودی یک ترانسفورماتور ایده‌آل ختم شده با

$$Z_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 Z_L$$

انداختن بلندگو خواهد داشت. نسبت دورهای لازم برابر $10 = \sqrt{\frac{800}{8}}$ $\frac{n_1}{n_2}$ میباشد.

تمرین ۱- نشان دهید که اگر در شکل (۲-۷) بجای سربالایی ثانویه، سربائینی آن «نقطه گذاری» شده باشد، روابط (۲-۵) و (۲-۶) بازهم معتبر خواهند بود.

تمرین ۲- مدار شکل (۲-۸) را در نظر بگیرید، که در آن یک ترانسفورماتور ایده آل به دو سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان با ضرایب خود القاء L_a و L_b ، مطابق شکل نشان داده شده، متصل میباشد. ثابت کنید که این مدار دو قطبی معادل یک جفت سلف تزویج شده با ماتریس ضرایب القاء زیر میباشد:

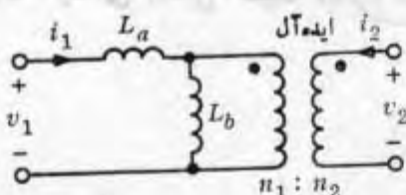
$$\begin{bmatrix} L_a + L_b & \frac{n_2}{n_1} L_b \\ \frac{n_2}{n_1} L_b & \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b \end{bmatrix}$$

تمرین فوق این حقیقت مهم را نشان میدهد که سلفهای تزویج شده را میتوان با سلفهای تزویج نشده و یک ترانسفورماتور ایده آل جایگزین کرد.

۳- منابع کنترل شده

۳-۱- توصیف چهار نوع از منابع کنترل شده

تا اینجا ما تنها با منابع ولتاژ ناپسته و منابع جریان ناپسته مواجه بوده ایم. منابع



شکل ۲-۸- یک مدار دو قطبی که معادل یک جفت سلف تزویج شده است

نا بسته، ورودی‌های مدار را تشکیل می‌دهند. در این بخش، نوع دیگری از منابع را که «منبع کنترل شده»^(۱) و یا «منبع وابسته»^(۲) نامیده میشوند معرفی خواهیم کرد. یک منبع کنترل شده برای ساختن مدل عناصر الکترونیکی، مانند ترانزیستور، ضروری است. بموجب تعریف، یک منبع کنترل شده عنصری است که دو شاخه دارد، که در آن شاخه ۲ یک منبع ولتاژ و یا یک منبع جریان است، و شاخه ۱ یک مدار باز و یا یک مدار اتصال کوتاه میباشد. شکل موج منبع در شاخه ۲ تابعی از ولتاژ دو سر مدار باز (در شاخه ۱) و یا تابعی از جریان گذرنده از مدار اتصال کوتاه (در شاخه ۱) میباشد. عبارت دیگر، منبع قرار گرفته در شاخه ۲ بوسیله ولتاژ و یا جریان شاخه دیگر، یعنی شاخه ۱، «کنترل میشود». البته چهار امکان وجود دارد که در شکل (۳-۱) نشان داده شده‌اند، که در آن، علامتهای لوزی شکل منابع «کنترل شده» را نمایش می‌دهند. در شکلهای (۳-۱ الف) و (۳-۱ ب) منابع شاخه ۲ منابع جریان میباشند که جریان آنها بترتیب به جریان شاخه ۱، که مدار اتصال کوتاه است، و ولتاژ شاخه ۱، که مدار باز است بستگی دارد. این منابع کنترل شده، بترتیب «منبع جریان کنترل شده با جریان» و «منبع جریان کنترل شده با ولتاژ» نامیده میشوند. در شکلهای (۳-۱ ب) و (۳-۱ ت) منابع شاخه ۲ منابع ولتاژ میباشند. ولتاژ آنها بترتیب به ولتاژ شاخه ۱، که مدار باز است، و به جریان شاخه ۱، که مدار اتصال کوتاه است، بستگی دارد. این منابع کنترل شده بترتیب «منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ»، و «منبع ولتاژ کنترل شده با جریان» نامیده میشوند.

این چهار نوع منبع کنترل شده بوسیله معادلاتی که در شکل نشان داده شده‌اند مشخص میشوند. چهار ضریب تناسب α ، g_m ، μ و r_m در شکل (۳-۱) بترتیب نشان دهنده نسبت جریان، رسانایی انتقالی، نسبت ولتاژ و مقاومت انتقالی میباشند. بنابراین داریم:

$$\alpha = \frac{i_2}{i_1} \quad \text{منبع جریان کنترل شده با جریان} :$$

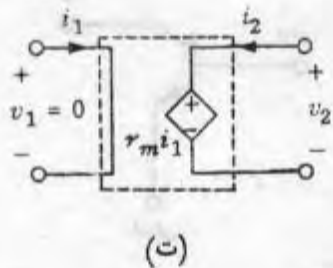
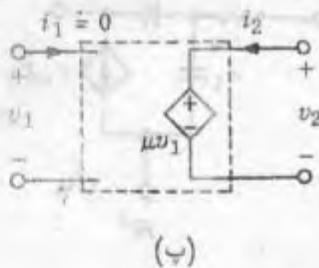
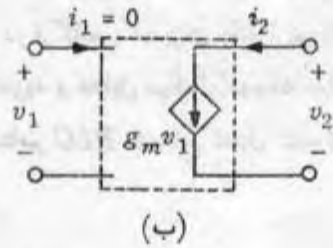
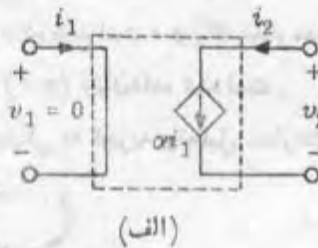
$$g_m = \frac{i_2}{v_1} \quad \text{منبع جریان کنترل شده با ولتاژ} :$$

(۳-۱)

$$\mu = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ} :$$

$$r_m = \frac{v_2}{i_1} \quad \text{منبع ولتاژ کنترل شده با جریان} :$$

این منابع کنترل شده، که با معادلات (۳-۱) مشخص شده‌اند و در آنها α



شکل ۳-۱- چهار نوع منبع کنترل شده. چون خرابی α ، g_m ، μ و r_m ثابت هستند این

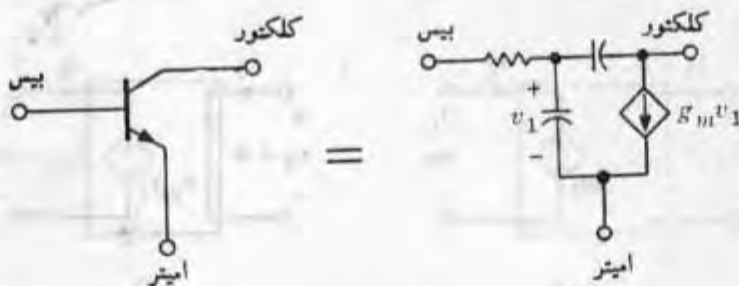
منابع کنترل شده عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان می‌باشند. (الف) $v_1 = 0$ و

$i_2 = \alpha i_1$ ، منبع جریان کنترل شده با جریان (ب) $i_1 = 0$ و $i_2 = g_m v_1$ ،

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ، (پ) $i_1 = 0$ و $v_2 = \mu v_1$ ، منبع ولتاژ کنترل

شده با ولتاژ، (ت) $v_1 = 0$ و $v_2 = r_m i_1$ ، منبع ولتاژ کنترل شده با جریان.

μ ، g_m و r_m مقادیر ثابت میباشند، عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان هستند. یک منبع کنترل شده غیر خطی مشخصه‌ای مانند $i_p = f(i_1)$ دارد که در آن $f(0)$ یک تابع غیر خطی است. یک منبع کنترل شده خطی تغییر پذیر با زمان مشخصه‌ای مانند $i_p = \alpha(t)i_1$ دارد که در آن $\alpha(0)$ یک تابع داده شده از زمان است. منابع کنترل شده خطی تغییر پذیر با زمان برای نمایش دادن بعضی مدولاتورها^(۱) مفید میباشند. با وجود این، برای سادگی، تنها منابع کنترل شده خطی تغییر ناپذیر با زمان در اینجا بررسی خواهند شد. وسایل الکترونیکی مانند ترانزیستورها و لامپهای خلاء را میتوان، وحتیکه بصورت خطی سیگنال کوچک کار کنند، با یکبار بردن مقاومتهای خطی، خازنهای خطی و یک منبع کنترل شده خطی، مانند آنچه در شکل (۳-۱) نشان داده شده است، مدل سازی نمود. مدار معادل سیگنال کوچک نوعی یک ترانزیستور با امیتر زمین^(۲) شده در شکل (۳-۲) در نشان داده شده است، و یک مدار معادل خطی در فرکانس کم برای یک تریود^(۳) در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. بنابراین، تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک مدارهای الکترونیکی به تجزیه و تحلیل مدارهای خطی با عناصر RLC و منابع کنترل شده تبدیل میشود.



شکل ۳-۲- مدار معادل خطی سیگنال کوچک یک ترانزیستور با امیتر زمین شده که در آن

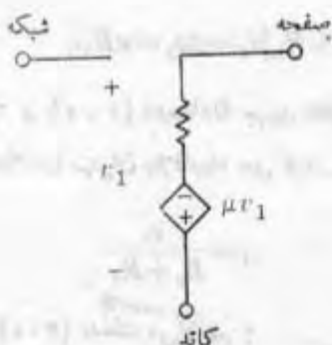
از یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ استفاده شده است.

تبصره ۵ - دلایل بکار بردن علائم مختلف برای منابع ناپسته و وابسته چنین است:

۱- منابع ناپسته نقش کاملاً متفاوتی از منابع وابسته ایفاء میکنند. منابع ناپسته ورودیهای مدار هستند، و نمایش دهنده مولدهای سیگنال میباشند. یعنی آنها تأثیر محیط خارج بر روی مدار را نمایش میدهند. چون مشخصه های منابع ناپسته خطوط سوازی محور v یا محور i در صفحه $v-i$ میباشند از اینجهت آنها عناصر غیر خطی میباشند (معمولاً تغییر پذیر با زمان هستند). منابع وابسته برای مدل سازی پدیدههایی که در دستگاههای الکترونیکی رخ میدهد بکار میروند. منابع وابسته تزویج میان یک متغیر مدار در شاخه ۱ و یک متغیر مدار در شاخه ۲ را نمایش میدهند. منابع وابسته نوعی در شکل (۳-۱) داده شده اند. منابعی که در شکل (۳-۱) نشان داده شده اند عناصر چهار سر «خطی» تغییر ناپذیر با زمان میباشند.

۲- مدارهای خطی ممکن است شامل منابع ناپسته و منابع وابسته، هر دو، باشند. معهذاً منابع وابسته بایستی خطی باشند، درحالیکه منابع ناپسته خطی نیستند.

۳- درقضایای شبکه های معادل توئن و نرتن (فصل شانزدهم)، منابع «وابسته» نقش کاملاً متفاوتی از منابع «ناپسته» ایفا میکنند.



شکل ۳-۳- مدار معادل لامپ تریود که در آن از یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ استفاده شده است.

۳-۲- مثالهایی از تجزیه و تحلیل مدار

در تجزیه و تحلیل مدار، هنگام نوشتن معادلات مدار، منابع کنترل شده را مانند منابع ناپسته در نظرمیگیریم. این امر بوسیله دومتال زیر نشان داده خواهد شد.

مثال ۱- مدار سادهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۱) را در نظر بگیرید. منبع کنترل

شدهٔ این مدار یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ می باشد، که در آن i_1 و i_2 دوشاخهٔ آنرا نمایش میدهند، و چنین مشخص میشود:

$$v_r = \mu v_1 \quad (3-2)$$

که‌ریم که ورودی منبع ناپسته v_s و خروجی ولتاژ v_L دوسر مقاومت R_L باشد. چون دوشاخ وجود دارد، میتوان دو معادلهٔ مش را با جریانهای مش i_1 و i_2 بعنوان متغیرهای آنها نوشت. این دو معادله چنین هستند:

$$(R_s + R_1)i_1 = v_s \quad (3-3)$$

$$(R_r + R_L)i_2 = v_r \quad (3-4)$$

از آنجائیکه منبع کنترل شده با معادلهٔ (۳-۲) مشخص شده است، میتوان معادلهٔ (۳-۴) را بصورت زیر نوشت:

$$(R_r + R_L)i_2 = \mu v_1 = \mu R_1 i_1 \quad (3-5)$$

بنابراین، معادلات (۳-۳) و (۳-۵) دو معادلهٔ جبری خطی بر حسب دوجریان مجهول i_1 و i_2 میباشند. این معادلات را میتوان بلافاصله حل کرد. از (۳-۳) داریم:

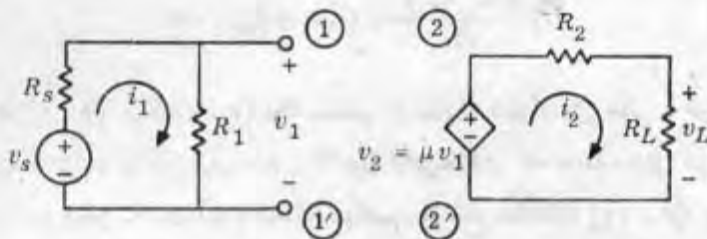
$$i_1 = \frac{v_s}{R_s + R_1} \quad (3-6)$$

بجایگذاری (۳-۶) در (۳-۵) بدست می‌آوریم:

$$i_2 = \frac{\mu v_s R_1}{(R_s + R_1)(R_r + R_L)}$$

بنابراین ولتاژ خروجی چنین است:

$$v_L = R_L i_2 = \frac{\mu v_s R_1 R_L}{(R_s + R_1)(R_r + R_L)} \quad (3-7)$$



شکل ۴-۳ - مثال ۱: یک مدار ساده با یک منبع کنترل شده

تبصره ۱- اگر ثابت μ بزرگ باشد و مقاومتها بطرز مناسبی انتخاب شده باشند، ولتاژ خروجی v_L میتواند از ولتاژ ورودی v_s بسیار بزرگتر باشد. در این حالت مدار یک تقویت کننده ولتاژ ساده را نمایش میدهد.

تبصره ۲- مدار شکل (۴-۳) شامل دو مش می باشد که بیکدیگر متصل نیستند. منبع کنترل شده بعنوان عنصر تزویج کننده میان مشهای ۱ و ۲، ویا میان ورودی و خروجی، عمل میکند.

مثال ۲- مدار شکل (۵-۳) را در نظر بگیرید. منبع کنترل شده در مدار یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ می باشد، که در آن ① و ①' و ② و ②' دو شاخه آنها را نمایش میدهند، و بوسیله رابطه زیر مشخص میشود:

$$i_2 = g_m v_1 \quad (۵-۳)$$

میخواهیم معادله دیفرانسیلی که منبع جریان ورودی i_2 و ولتاژ v_1 را بهم مربوط میکند بدست آوریم. در اینجا از تجزیه و تحلیل گره استفاده میکنیم. گیریم v_1 و v_2 دو ولتاژ گره باشند. دو معادله گره چنین هستند:

$$G_1 v_1 + C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = i_s \quad (۵-۹)$$

$$C_2 \frac{d(v_2 - v_1)}{dt} + G_2 v_2 = -i_2 \quad (۵-۱۰)$$

در معادله (۵-۱۰) بجای جریان i_2 میتوان، طبق رابطه (۵-۳)، $g_m v_1$ را قرارداد و بنابراین معادله (۵-۱۰) بدین صورت درسی آید:

$$(۳-۱۱) \quad C_r \frac{d(v_r - v_1)}{dt} + G_r v_r + g_m v_1 = 0$$

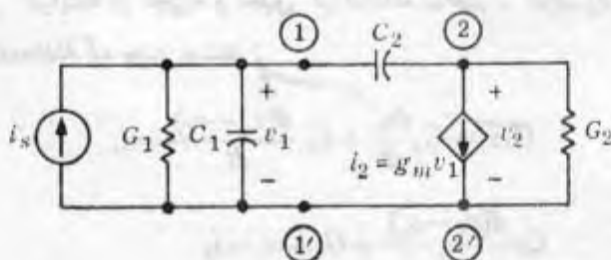
معادلات (۳-۹) و (۳-۱۱) یک سیستم دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت برحسب v_1 و v_r را تشکیل می‌دهند. اکنون از این حقیقت که جملهٔ مشتق در دو معادله یکسان است (بجز علامت آنها) استفاده می‌کنیم. از جمع معادلات (۳-۱۱) و (۳-۹) بدست می‌آوریم:

$$(۳-۱۲) \quad (G_1 + g_m)v_1 + C_1 \frac{dv_1}{dt} - i_s = -G_r v_r$$

با مشتق‌گیری از (۳-۱۲) و جایگذاری $\frac{dv_r}{dt}$ در (۳-۹)، معادلهٔ دیفرانسیل لازم را برحسب v_1 بدست می‌آوریم. بنابراین:

$$(۳-۱۳) \quad \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left(\frac{G_1 + g_m + G_r}{C_1} + \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_r}{G_r} \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{G_1 G_r}{C_1 C_r} v_1 = \frac{1}{C_1} \frac{di_s}{dt} + \frac{G_r}{C_1 C_r} i_s$$

شرط اولیه لازم را میتوان باسانی از اطلاعات داده شده یعنی $v_1(0) = V_1$ و $v_r(0) = V_r$ بدست آورد. برای تعیین $\frac{dv_1}{dt}(0)$ در معادله (۳-۱۲)، $t=0$ قرار می‌دهیم و بدست می‌آوریم:



شکل ۵-۳- مثال ۲: یک مدار ساده با یک منبع کنترل شده که با استفاده از

روش تجزیه و تحلیل گره بررسی شده است.

$$\frac{dv_1}{dt}(0) = \frac{1}{C_1} [i_s(0) - G_2 V_2 - (g_m + G_1) V_1]$$

با این دو شرط اولیه، و برای هر i_s داده شده، محاسبه جواب معادله (۱۳ - ۳) و همچنین جایگزین نمودن نتیجه آن در معادله (۱۲ - ۳) برای بدست آوردن v_2 کار ساده‌ای است.

۳-۳- خواص دیگر منابع کنترل شده

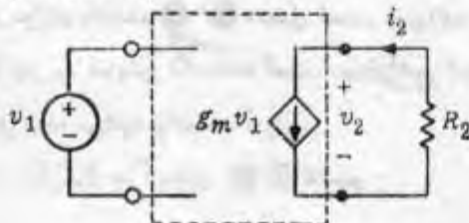
چنانکه در بخش (۱ - ۳) گفته شد، منابع کنترل شده نشان داده شده در شکل (۱ - ۳)، عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان میباشند. آنها عناصر تزویج کننده هستند چون ولتاژها و جریانهای دوشاخه مختلف را بهم ربط میدهند. چون معادلاتی که منابع کنترل شده را مشخص مینمایند (شکل (۱ - ۳) را ببینید) معادلات جبری خطی برحسب متغیرهای ولتاژها و جریانها میباشند، منابع کنترل شده را میتوان بعنوان عناصر دوقطبی مقاومتی در نظر گرفت. با در نظر داشتن اینکه ما از جبهات قراردادی متناظر استفاده میکنیم، توان لحظه‌ای که وارد مدار دوقطبی میشود چنین است:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \quad (14-3)$$

چون شاخه ۱ یعنی شاخه ورودی مدار اتصال کوتاه ($v_1 = 0$) و یا مدار باز ($i_1 = 0$) است توان لحظه‌ای برای هر چهار نوع منبع کنترل شده چنین است:

$$p(t) = v_2(t)i_2(t)$$

گیریم شاخه ۱ یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ را به یک منبع ولتاژ ناپسته و شاخه ۲ یعنی شاخه خروجی را به یک مقاومت خطی با مقاوت R_2 وصل کنیم. این امر در شکل



شکل ۳-۳- مداری که نشان میدهد منابع کنترل شده ممکن است به محیط خارج انرژی

تحويل بدهند، در نتیجه منابع کنترل شده عناصر اکتیو هستند.

(۳-۶) نشان داده شده است. با توجه به جهات قراردادی برای v_r و i_r ، از قانون اهم نتیجه می‌شود:

$$v_r = -i_r R_r \quad (3-10)$$

با جایگزینی معادله (۳-۱۰) در (۳-۱۴) بدست می‌آوریم:

$$p(t) = -i_r^2(t) R_r$$

بنابراین، توان لحظه‌ای وارد شونده به مدار دو قطبی همواره منفی است. عبارت دیگر، منبع کنترل شده با شدت $R_r i_r^2(t)$ به مقاومت R_r توان تحویل می‌دهد. بنابراین با کنترل ولتاژ ورودی v_r مدار، در شکل (۳-۶)، می‌توان بوسیله منبع ولتاژ وابسته v_r هر مقدار انرژی به مقاومت بار R_r تحویل داد. به‌عبارت دیگر، در فصل دوم عنصر «پسیو» را بعنوان عنصری که نتواند به محیط خارج انرژی تحویل دهد تعریف نمودیم. از آنجائیکه یک منبع کنترل شده را می‌توان بعنوان یک عنصر مقاومتی دو قطبی در نظر گرفت و با توجه باینکه این عنصر می‌تواند به محیط خارج انرژی تحویل دهد، از اینرو منبع کنترل شده یک عنصر «اکتیو» است.

در بخش قبل دیدیم مداری که شامل یک منبع کنترل شده و مقاومت‌های پسیو باشد می‌تواند ولتاژها را تقویت کند. اکنون مثال دیگری، برای نشان دادن اینکه از بکار بردن منابع کنترل شده امکانات جالب دیگری نیز بدست می‌آید، بیان می‌کنیم.

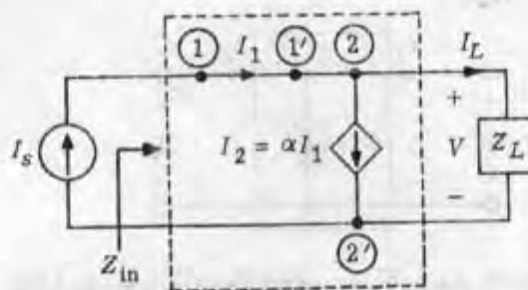
مثال ۳- تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدار ساده شکل (۳-۷) را در نظر

بگیرید. منبع کنترل شده بوسیلهٔ دو شاخهٔ ① و ①' نمایش داده شده است. امپدانس Z_L بطور موازی با شاخه ① و ①' متصل است. ورودی، منبع جریان وابسته است که جریان آن با فازور I_r نمایش داده شده است. می‌خواهیم امپدانس ورودی Z_{in} که بوسیله منبع ورودی دیده می‌شود را بدست آوریم.

با استفاده از KCL در گره‌های ① و ①' داریم:

$$I_2 = I_1 \quad \text{و} \quad I_1 = \alpha I_1 + I_L \quad (3-11)$$

بنابراین امپدانس ورودی عبارت است از:



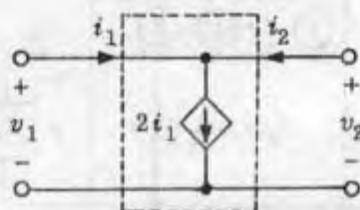
شکل ۷-۳- مثال : یک مدار دوقطبی که بوسیله یک منبع کنترل شده حاصل شده است

$$(۷-۲) \quad Z_{in} = \frac{V}{I_s} = \frac{Z_L I_L}{I_s}$$

با ترکیب معادلات (۷-۲) و (۷-۳) داریم :

$$(۷-۳) \quad Z_{in} = (1 - \alpha) Z_L$$

میتوان مشاهده کرد که اگر پارامتر α برابر ۲ باشد، معادله (۷-۳) نشان میدهد که Z_{in} با منفی Z_L برابر است. بنابراین، اگر Z_L امپدانس یک مدار یک قطبی پسیو را نشان دهد، $Z_{in} = -Z_L$ امپدانس یک مدار یک قطبی اکتیو را نمایش میدهد. در فصل هفتم نشان دادیم که یک شرط لازم برای اینکه امپدانس نقطه تحریک Z_L پسیو باشد این است که، برای تمام مقادیر ω ، $\text{Re}[Z_L(j\omega)] \geq 0$ باشد. از آنجائیکه $Z_{in} = -Z_L$ است، و بنابراین، وقتی که $\alpha = 2$ باشد، $\text{Re}[Z_{in}(j\omega)] \leq 0$ ، و بنابراین، مدار دوقطبی داخل مربع خط چین شده در شکل (۷-۳) «مبدل امپدانس منفی»^(۱) نامیده میشود. یک مبدل امپدانس منفی، یک دستگاه دوقطبی با این خاصیت است که امپدانس ورودی اش برابر منفی هر امپدانسی است که در قطب خروجی به آن متصل باشد. درحقیقت، مبدل امپدانس منفی خود یک عنصر دوقطبی تزویج کننده است. اگر قسمت داخل مربع خط چین شده مدار شکل (۷-۳) را، مطابق آنچه در شکل (۷-۳) نشان داده شده است با $\alpha = 2$ مجدداً رسم کنیم و جریانها و ولتاژها را مطابق شکل، مجدداً تعریف کنیم، توصیف یک مبدل امپدانس منفی بصورت زیر میباشد:



شکل ۳-۸ - یک مبدل امپدانس منفی که بوسیله یک منبع کنترل شده حاصل شده است.

$$(۱۹-۳) \quad v_1 = v_2 \quad i_1 = i_2$$

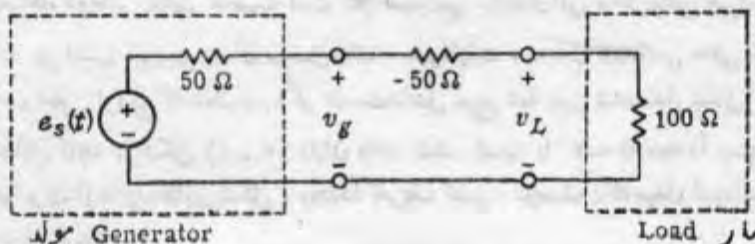
چنانکه در فصلهای دوم و پنجم دیدیم، یک مقاومت منفی یک عنصر اکتیو است. این نکته در تمرین زیر مجدداً تأکید میشود. این مطلب در طرح تقویت‌کننده‌ها و بعضی سیستمهای ارتباطی کابلی مورد استفاده قرار گرفته است.

تمرین - مدار نشان داده شده در شکل (۹-۳) را در نظر بگیرید.

الف - برای حالتی که e_s مقدار ثابتی برابر ۱۰ ولت میباشد، توانی که مولد تحویل میدهد، توانی که مقاومت منفی دریافت میکند، و توانی که مقاومت بار دریافت میکند را محاسبه کنید.

ب - مسأله را برای حالتی که $e_s(t) = 10 \cos \omega t$ میباشد تکرار کنید (توان لحظه‌ای و توان متوسط، هر دو، را محاسبه کنید).

پ - دربارهٔ چگونگی تقسیم انرژی در مدار چه میتوانید بگوئید؟



شکل ۳-۹ - تمرینی که نشان میدهد مقاومت منفی به بار توان تحویل میدهد

خلاصه

● عناصر تزویج کننده نوعی عبارت از سلفهای تزویج شده، ترانسفورماتورهای ایده آل، و منابع کنترل شده میباشند. عناصر تزویج کننده بیش از یک شاخه و بیش از دوسر دارند، که تعداد آنها معمولاً چهار می باشد. آنها بوسیله معادلاتی که ولتاژ شاخه و جریان شاخه آنها را بهم مربوط می سازند تعریف میگردند.

● معادلاتی که یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان را تعریف میکنند عبارتند از :

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

برای تکمیل مشخصات، جریانهای اولیه $i_1(0)$ و $i_2(0)$ لازم است. ● انرژی ذخیره شده در یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان چنین است :

$$g(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

اگر این سلفها پسیو باشند، ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} مثبت میباشند، درحالیکه ممکن است M مثبت و یا منفی باشد. مقدار M به ضریب تزویج k ، که بوسیله رابطه زیر تعریف میشود، مربوط است :

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}$$

پسیو بودن لازم میدارد که $0 \leq k \leq 1$ باشد.

● سلفهای خطی تغییر ناپذیر با زمان را میتوان برحسب ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ توصیف نمود. بنابراین :

$$\mathbf{v} = \mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

همچنین، میتوان آنها را برحسب ماتریس ضرایب القاء معکوس Γ تعریف نمود. بنابراین:

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}(0) + \Gamma \int_0^t \mathbf{v}(t') dt'$$

رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\Gamma = \mathbf{L}^{-1}$$

● معادلات تعریف‌کننده یک ترانسفورماتور ایده‌آل با دو سیم پیچی چنین است:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{-i_2(t)}{i_1(t)}$$

که در آن n_1 و n_2 به ترتیب تعداد دور در سیم‌پیچی اول و سیم‌پیچی دوم میباشد. این معادلات وقتی برقرار است که جهات قراردادی i_1 و i_2 هر دو به سرتیغه گذاری شده داخل (و یا از آن خارج) شوند. اگر این وضع برقرار نباشد، بجای n_1 ، $-n_1$ قرار دهید.

● یک ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر خطی تغییر ناپذیر با زمان است، و انرژی تلف و یا ذخیره نمی‌کند.

● یک ترانسفورماتور ایده‌آل را میتوان بعنوان یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان، با ضرایب خود القاء بینهایت، و ضریب تزویجی برابر بایک در نظر گرفت.

● چهار نوع اصلی منبع کنترل شده خطی تغییر ناپذیر با زمان چنین است:

$$i_2 = \alpha i_1 \quad v_1 = 0 \quad \text{منبع جریان کنترل شده با جریان:}$$

$$i_2 = g_m v_1 \quad i_1 = 0 \quad \text{منبع جریان کنترل شده با ولتاژ:}$$

$$v_2 = \mu v_1 \quad i_1 = 0 \quad \text{منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ:}$$

$$v_2 = r_m i_1 \quad v_1 = 0 \quad \text{منبع ولتاژ کنترل شده با جریان:}$$

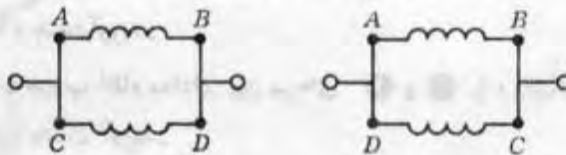
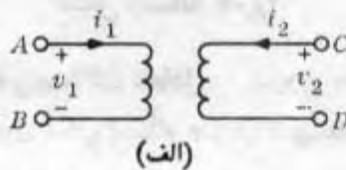
که در آن، α ، g_m ، μ و r_m مقادیر ثابت میباشند.

مسائل

۱- اتصال سری و موازی سلفهای تزویج شده یک جفت سلف تزویج شده (با جهات قراردادی نشان داده شده در شکل (مسئله ۱-۸ الف)) دارای ماتریس ضرایب القاء زیر می باشد :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

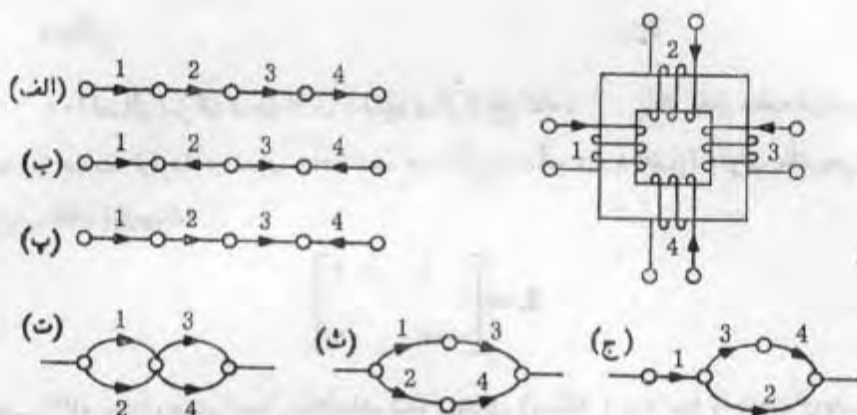
ضریب القاء معادل چهار اتصال نشان داده شده در شکل (مسئله ۱-۸ ب) را بدست آورید.



(ب)

شکل (مسئله ۱-۸)

۲- علامت M ، اتصالهای سری و موازی در شکل (مسئله ۲-۸) ترتیب قرار گرفتن فیزیکی سیم پیچی سلفها روی یک هسته مشترک رسم شده است. مقدار هوزریب خود القاء برابر ۲ هانری ، و قدر مطلق ضریب القاء متقابل مساوی ۱ هانری است. ضریب القاء خالص مدارهای (الف) تا (ج) را بدست آورید. در شکلهای (الف) ، (ب) و غیره پیکان ها، جهت قراردادی هر سیم پیچی را نشان میدهد.



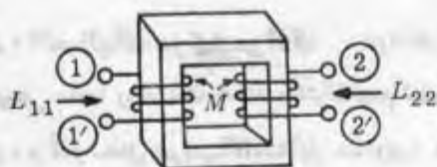
شکل (مسئله ۲-۸)

۳- علامت M ، ضریب القاء معادل، تزویج مغناطیسی میان دوسلف خطی تغییر ناپذیر با زمان، مطابق شکل (مسئله ۳-۸)، بوسیلهٔ یک هسته تأمین میشود. مقادیر ضرایب خود القاء عبارتند از $L_{11} = 2$ هانری و $L_{22} = 3$ هانری، و ضریب القاء متقابل $M = 1$ هانری است.

الف- ضریب القاء معادل بین سرهای ① و ② را، وقتی که ③ و ④ بهم وصل شده باشند، بدست آورید.

ب- ضریب القاء معادل بین سرهای ① و ③ را، وقتی که ② و ④ بهم وصل شده باشند، بدست آورید.

پ- با به کار بردن یک پل القایی تنها، روشی برای اندازه گیری ضریب القاء متقابل بین سیم پیچی‌ها پیشنهاد کنید.



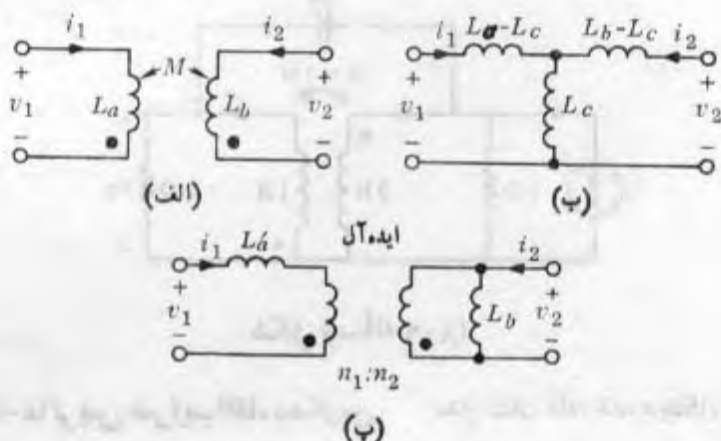
شکل (مسئله ۳-۸)

۴- ماتریس ضرایب القاء دو قطبی‌های معادل سلفهای مدارهای نشان داده شده در شکل (مسئله ۴-۸) خطی و تغییر ناپذیر با زمان هستند.

الف - ماتریس ضرایب القاء را برای هر مدار بدست آورید.

ب - نشان دهید که اگر $L_c = M$ باشد، مدارهای (الف) و (ب) ماتریس ضرایب

القاء یکسان دارند.



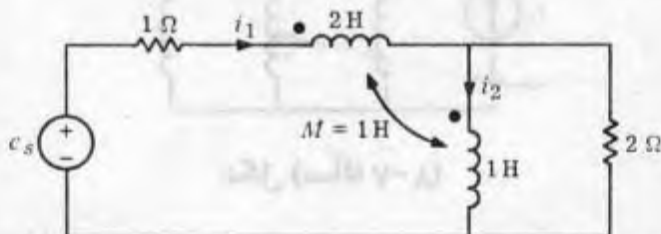
شکل (مسأله ۴-۸)

پ - چه رابطه‌ای باید L'_a و $\frac{n_1}{n_2}$ با L_a و M داشته باشند تا مدارهای (الف) و

(پ) دارای ماتریس ضرایب القاء یکسان باشند؟

۵ - تجزیه و تحلیل مش مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۵-۸) در حالت

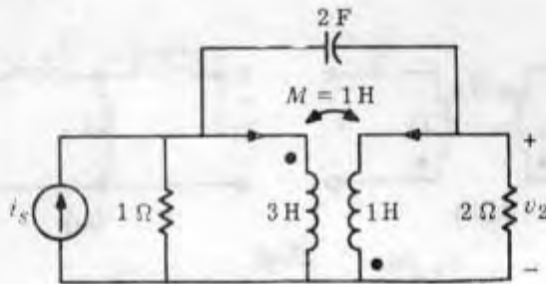
دائمی سینوسی است، که در آن، ورودی یک منبع ولتاژ $v_s(t) = \cos(2t + 30^\circ)$ می باشد جریانه‌های حالت دائمی i_1 و i_2 را بدست آورید.



شکل (مسأله ۵-۸)

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

۶- تجزیه و تحلیل گره برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۶-۸) معادلات گره را بنویسید. اگر $i_s(t) = \cos t$ باشد، ولتاژ حالت دائمی سینوسی $v_2(t)$ را تعیین کنید.



شکل (مسئله ۶-۸)

۷- ماتریس ضرایب القاء معکوس مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۷-۸) داده شده است. جریانهای حالت دائمی $i_1(t)$ ، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ را برای منبع جریان ورودی $i_s(t) = \sin t$ تعیین کنید. ماتریس ضرایب القاء سه ملف تزویج شده چنین است:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

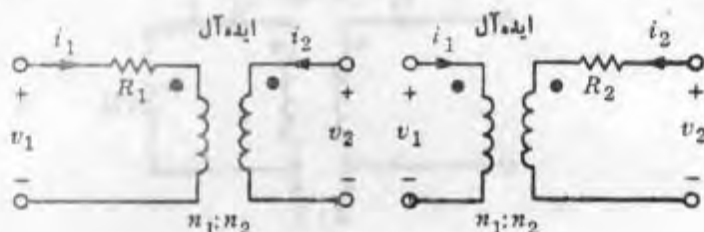


شکل (مسئله ۷-۸)

۸- انرژی ذخیره شده فرض کنید در مدار مسئله ۷، یک منبع جریان ثابت بوده و $i_1 = 2$ ، $i_2 = 1$ و $i_3 = -3$ آمپر باشند. انرژی ذخیره شده در سلفها چقدر است؟

۹- ترانسفورماتور ایده آل و دو قطبی های معادل عبارتند برای R_1

بیاید بطوریکه دو قطبی های نشان داده شده در شکل (مسئله ۹ - ۸) معادل باشند.



شکل (مسئله ۹ - ۸)

۱۰- خاصیت تغییر امپدانس ترانسفورماتور ایده آل، محاسبه توان

متوسط مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۰ - ۸) خطی و تغییر ناپذیر با زمان میباشد.

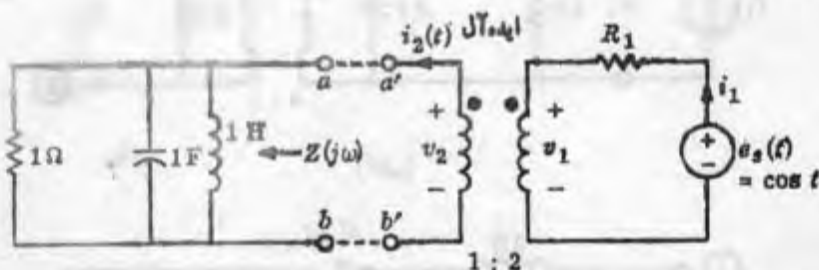
الف - $Z(j\omega)$ را، و تئیکه aa' و bb' وصل نشده اند، بدست آورید.

ب - در حالتیکه aa' و bb' وصل شده باشند، با فرض اینکه تمام ولتاژها و جریانهای

شاخه هاسینوسی و با فرکانسی برابر فرکانس e_2 باشند، برای $R_1 = 2$ اهم، i_1 را بدست آورید.

پ - آن مقدار R_1 که موجب حداکثر اتلاف توان متوسط در مقاومت R میشود را

بدست آورید.



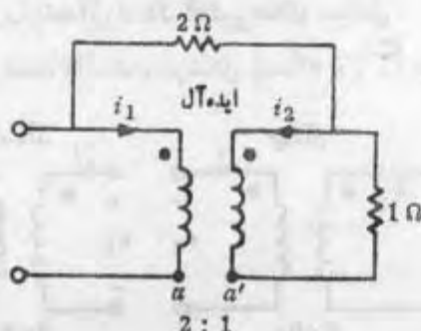
شکل (مسئله ۱۰ - ۸)

۱۱ - معادلات تعریف کننده ترانسفورماتور ایده آل الف - مقاومت

معادل مدار یک قطبی نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۱ - ۸) را تعیین کنید.

ب - مسئله را برای حالتی که نقاط a و a' بایک اتصال کوتاه بهم وصل شده باشند

تکرار کنید.



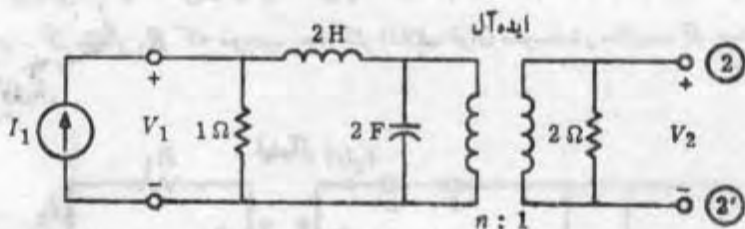
شکل (مسئله ۱۱-۸)

۱۲- خواص نقطه تحریک و انتقالی ترانسفورماتور ایده‌آل

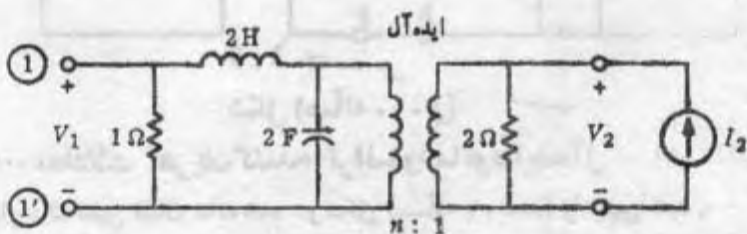
برای مدارهای نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۲-۸) اسپدانس‌های زیر را [با یکبار بردن شکل (الف)]

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1} \text{ و } Z_{21}(j\omega) = \frac{V_2}{I_1}$$

و اسپدانسهای زیر را [با یکبار بردن شکل (ب)] محاسبه کنید :



(الف)



(ب)

شکل (مسئله ۱۲-۸)

$$Z_{rr}(j\omega) = \frac{V_r}{I_r} \text{ و } Z_{1r}(j\omega) = \frac{V_1}{I_r}$$

که در آن V_1 و V_r فازورهایی هستند که بترتیب ولتاژهای خروجی سینوسی $v_1(t)$ و $v_r(t)$ را نمایش میدهند، و I_1 و I_r فازورهایی هستند که بترتیب جریانهای ورودی $i_1(t)$ و $i_r(t)$ را نمایش میدهند. توجه کنید که در شکل (الف)، سرهای ① و ①' مدار باز میباشند، و در شکل (ب) سرهای ① و ①' مدار باز میباشند.

۱۳- خواص نقطه تحریک و انتقالی سلفهای تزویج شده یک

جفت سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان که با ماتریس ضرایب القاء مشخص شده اند را در نظر بگیرید. (شکل (مسأله ۱۳ - ۸) را ببینید).

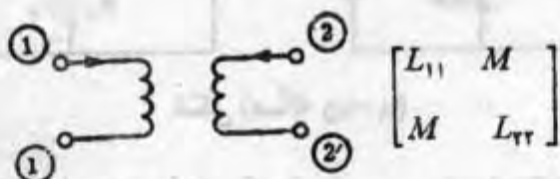
الف - نشان دهید که امپدانس نقطه تحریک $Z_{10}(j\omega)$ (که در دوسر ① و ①' موقعی که ② و ②' باز است دیده میشود) و امپدانس نقطه تحریک $Z_{r0}(j\omega)$ (که در دوسر ① و ①' موقعی که ② و ②' باز است دیده میشود) در رابطه زیر صدق میکنند:

$$\frac{Z_{10}(j\omega)}{L_{11}} = \frac{Z_{r0}(j\omega)}{L_{rr}}$$

ب - نشان دهید که:

$$\frac{Z_{1s}(j\omega)}{L_{11}} = \frac{Z_{rs}(j\omega)}{L_{rr}}$$

که در آن $Z_{1s}(j\omega)$ امپدانس ورودی دیده شده بین دوسر ① و ①' موقعی که ② و ②' اتصال کوتاه شده باشند، و $Z_{rs}(j\omega)$ امپدانس ورودی دیده شده بین دوسر ② و ②' موقعی که ① و ①' اتصال کوتاه شده باشند.

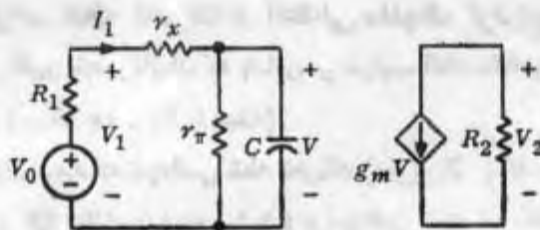


شکل (مسأله ۱۳ - ۸)

۱۴- تقویت کننده ترانزیستوری شکل (مسئله ۱۴-۸) مدار معادل سیگنال کوچک یک تقویت کننده ترانزیستوری ساده را نشان می‌دهد. V_0 و V_1 ، I_1 ، V_2 نشان دهنده فازورهای سینوسی با فرکانس ω می‌باشند،

الف- امپدانس نقطه تحریک $Z_{in}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1}$ را حساب کنید.

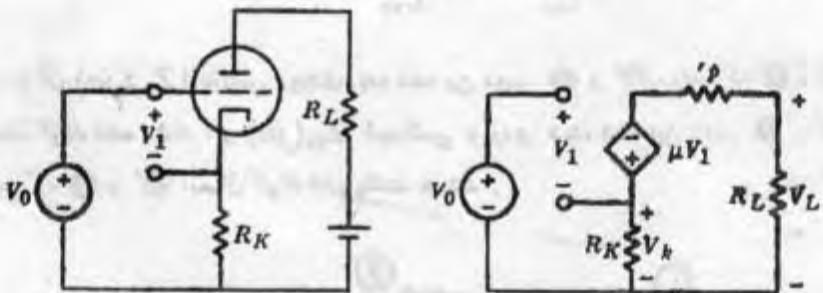
ب- نسبت انتقالی ولتاژها $H(j\omega) = \frac{V_2}{V_0}$ را حساب کنید.



شکل (مسئله ۱۴-۸)

۱۵- تقویت کننده لامپی شکل (مسئله ۱۵-۸) یک مدار تقویت کننده لامپی

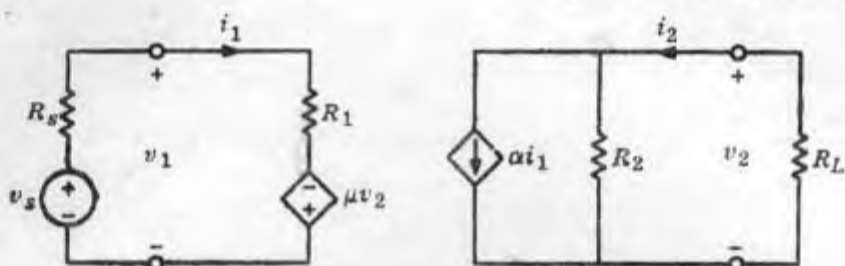
و مدار معادل سیگنال کوچک آنرا نشان می‌دهد. نسبت‌های ولتاژهای $\frac{V_L}{V_0}$ و $\frac{V_k}{V_0}$ را بر حسب مقاومت‌های داده شده و ثابت μ حساب کنید.



شکل (مسئله ۱۵-۸)

۱۶- منابع وابسته مدار شکل (مسئله ۱۶-۸) مدل دیگری از یک تقویت

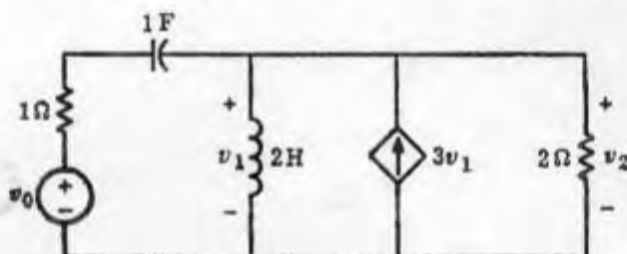
کننده ترانزیستوری در فرکانس‌های پایین را نمایش می‌دهد. ولتاژهای v_1 و v_2 را تعیین کنید.



شکل (مسئله ۱۶-۸)

۱۷- منبع وابسته و تابع شبکه برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله

۱۷-۸) تابع شبکه $H(j\omega) \triangleq \frac{V_r}{V_0}$ را تعیین کنید، که در آن V_0 و V_r فازورهایی هستند که به ترتیب ولتاژهای سینوسی $v_0(t)$ و $v_r(t)$ را نمایش میدهند.



شکل (مسئله ۱۷-۸)

۱۸- ترانسفورماتور ایده آل و منابع وابسته یک ترانسفورماتور ایده آل

با دو سیم پیچی و نسبت دورهای $n:1$ را میتوان بوسیله مدلی که از دو منبع وابسته تشکیل میشود نمایش داد. براساس معادلات تعریف کننده ترانسفورماتور ایده آل و منابع وابسته، مدل مناسبی برای ترانسفورماتور ایده آل چنان تعیین کنید که از دو منبع وابسته که بطور مناسبی انتخاب شده باشند استفاده کند.