فصل چهارم

مدارهای مرتبه اول

در دوفصل پیش سه نوع اساسی اجزاء مدار را مفصلا" بررسی کردیم و بعضی مدارهای ساده را تجزیه و تحلیل نمودیم . اتصال سری و موازی اجزاء مداری را که ازیک نوع عنصر تشکیل شده باشد درنظر گرفته با آوردن مثالهائی نشان دادیم که چگونه یک قطبی‌های معادل را بدست آورده جواب آنها را پیدا میکنیم . دراین مثالها ما هم روشهای تحلیلی وهم روشهای ترسیمی بکار بردیم . درهر یک ازاین روشها و حتی در مدارهائیکه تنها از یک نوع عنصر تشکیل می‌یابند ، هرچه این مدارها پیچیده باشند ، تنها عملیات جبری مورد نیاز بوده معادلات دیفرانسیل دخالت نمی‌یابند .

ما دراین فصل مدارهائی راکه از بیش از یک نوع عنصر تشکیل می‌یابند تجزیه و تحلیل کرده و درنتیجه از عمل‌هائی مانند مشتق‌گیری و/یا انتگرال‌گیری استفاده خواهیم کرد . چون بحث ما تنها به مدارهایی که با معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول توصیف میشوند محدود میباشد آنها را « مدارهای مرتبه اول[1] » خواهیم‌خواند . نخست مداری راکه شامل یک مقاومت ویک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد تجزیه و تحلیل نموده و این مثال ساده را درهمه این فصل برای یافتن بعضی نتایج اساسی مربوط به مدارها و سیستمهای خطی که تغییرناپذیر با زمان میباشند بکار خواهیم برد . نخست مفهومهای پاسخ ورودی صفر[2] ، پاسخ حالت صفر[3] وپاسخ کامل را همراه با یادآوری مختصر حل معادله‌های دیفرانسیل مطالعه میکنیم و سپس توابع پله و ضربه را مطالعه کرده و نشان خواهیم داد که چگونه پاسخ‌های پله وضربه بدست می‌آیند . درفصلهای بعد ، مدارهای ازمرتبهٔ بالاتر یعنی مدارهائی که با معادله‌های دیفرانسیل مرتبه بالاتر توصیف میشوند را مطالعه خواهیم کرد . مدارهای مرتبه اول ساده غیرخطی یا مدارهائی که با زمان تغییرپذیرند درپایان این فصل بطورمختصر مطالعه خواهند شد. منظور اساسی ما آنستکه روشهای ساده و درعین‌حال سودمندی که در حل مدارهای با عنصرهای غیرخطی و یا

---

۱ — First order circuits

۲ — Zero input response

۳ — Zero state response

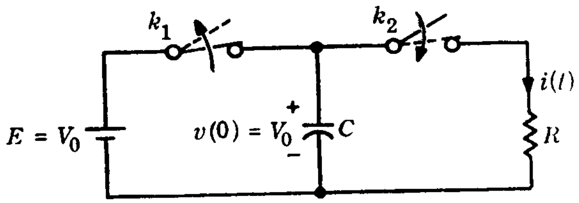
تغییرپذیر با زمان بکار می‌آیند را بیان نموده در نتیجه تفاوت بین این مدارهارا با مدارهائی که شامل عنصرهای خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند آشکار سازیم .

درآنچه پس‌ازاین خواهیم‌گفت ، برای ساده‌کردن برخی توصیفها ، اصطلاحات زیر را بکار میبریم : یک مدار فشرده را **خطی** گویند هرگاه هریک از اجزاء آن یک عنصر خطی یا یک منبع نابسته باشد . بهمین‌سان گویند یک مدار فشرده **تغییر ناپذیر با زمان** است هرگاه هریک از جزءهای آن یک عنصر تغییرناپذیر با زمان یا یک منبع نابسته باشد بدینسان اجزاء یک « مدارخطی تغییرناپذیر با زمان» ، عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان یا منابع نابسته هستند . بطریقی مشابه ، مداری راکه حاوی یک یا چند عنصر غیرخطی غیراز منابع نابسته باشد **مدارغیرخطی** ، و مداری را که حاوی یک یا چند عنصر تغییرپذیر با زمان غیر ازمنابع نابسته باشد **مدار تغییرپذیر بازمان** گویند . دلیل اینکه چرا منابع نابسته بطور جدا درنظرگرفته میشوند بعد روشن خواهد شد .

۱- مدار خطی تغییر ناپذیر بازمان مرتبه اول ، پاسخ ورودی صفر

۱-۱- مدار RC (مقاومت وخازن)

در مدار شکل (۱ - ۱) خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ظرفیت C بوسیلهٔ یک منبع ولتاژ ثابت به پتانسیل V_0 بار شده است . درلحظهٔ $t=0$ بطور همزمان کلید k_1 باز وکلید k_2 بسته میشود ، پس دراین لحظه، خازن بارشده ازمنبع قطع شده وبه مقاومت خطی تغییرناپذیر بازمان R متصل میشود . اکنون آنچه راکه روی میدهد بطور فیزیکی توصیف میکنیم. بعلت باری که درخازن ذخیره شده است $(Q_0=CV_0)$ جریانی درجهت



شکل ۱-۱- یک خازن بار شده به یک مقاومت متصل شده است

(درلحظه $t=0$ ، k_1 باز و k_2 بسته میشود)

قراردادی تصریح شده $i(t)$ ، مطابق شکل (۱ - ۱) برقرار میگردد . بار ذخیره شده در خازن بتدریج کاهش یافته بالاخره به‌صفر میرسد وجریان $i(t)$ نیز کاهش یافته بهمین ترتیب به‌صفر میرسد . دراین عمل انرژی‌الکتریکی که درخازن ذخیره شده است بصورت‌حرارت در مقاومت تلف خواهد شد .

اکنون آنچه راکه دربارهٔ نظریه مدار میدانیم برای تجزیه و تحلیل این مسأله بکار میبریم . توجه خود را به‌حالت $t \geqslant 0$ محدود کرده مدار RC را بار دیگر بصورت شکل (۲ - ۱) رسم می‌کنیم . چنانکه می‌بینیم جهت‌های قراردادی برای ولتاژ و جریان شاخه‌ها بخوبی‌مشخص شده‌اند . V_0 همراه باعلامتهای $+$ و $-$ کنار خازن‌مقدار وپلاریته[1] ولتاژ اولیه خازن‌را معین‌میکنند . ازقانونهای کیرشف و توپولوژی مدار (اتصال موازی R و C) این معادله‌ها بدست می‌آیند :

$$\text{KVL}: \quad v_C(t) = v_R(t) \qquad t \geqslant 0 \tag{۱ - ۱}$$

$$\text{KCL}: \quad i_C(t) + i_R(t) = 0 \qquad t \geqslant 0 \tag{۱ - ۲}$$

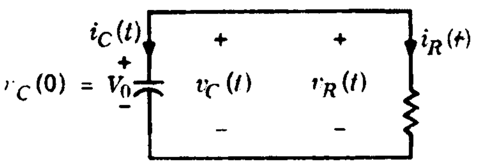
دومعادلهٔ شاخه برای دوعنصر مدار چنین میباشند :

(۱ - ۳) مقاومت : $v_R = R\, i_R$

(۱ - ٤ الف) خازن : $i_C = C \dfrac{dv_C}{dt}$ و $v_C(0) = V_0$

معادلهٔ (٤ - ۱ الف) بصورت هم‌ارز زیر نوشته میشود :

(٤ - ۱ ب) $$v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')\, dt'$$



شکل ۲-۱- یک مدار RC ، $v_C(0) = V_0$

---

1 — Polarity

باید متوجه بود که درمعادلهٔ (٤ - ۱ الف) شرط اولیه ولتاژ خازن باید همراه با :

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

نوشته شود وگرنه حالت خازن کاملاً مشخص نخواهد بود . این نکته از معادلهٔ دیگر شاخه که بصورت (٤ - ۱ ب) نوشته شده است آشکار میباشد .

درمداری که در بالا دیدیم ، چهار معادله و چهار مجهول داریم که مجهولها دو ولتاژ شاخه v_C و v_R و دوجریان شاخه i_C و i_R میباشند. پس توصیف مدار ازلحاظ ریاضی کامل است و میتوان معادله‌ها را نسبت به هریک ازمتغیرها یا همهٔ آنها حل کرد . فرض کنیم میخواهیم ولتاژ دوسرخازن را تعیین کنیم . با ترکیب معادله‌های (۱ - ۱) تا (٤ - ۱ الف) برای $t \geqslant 0$ خواهیم داشت :

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C = -i_R = -\frac{v_R}{R} = -\frac{v_C}{R} \quad \text{و} \quad v_C(0) = V_0$$

و یا :

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = 0 \qquad t \geqslant 0 \quad \text{و} \quad v_C(0) = V_0 \tag{۱ - ٥}$$

این یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن باضرایب ثابت است که جواب آن بصورت نمایی[۱] زیر میباشد :

$$v_C(t) = K e^{s_0 t} \tag{۱ - ٦}$$

که درآن :

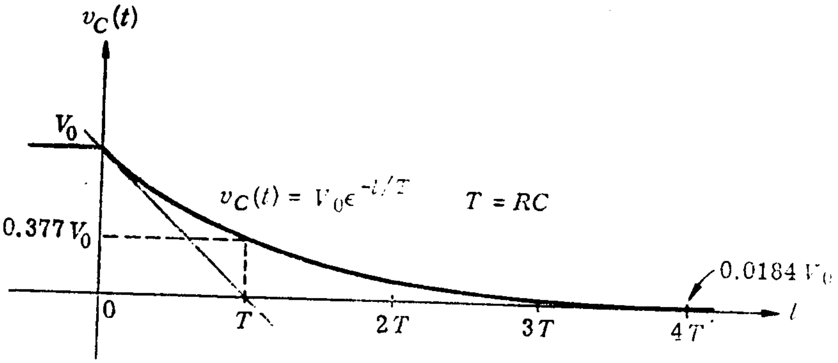
$$s_0 = -\frac{1}{RC} \tag{۱ - ۷}$$

میتوان درستی این جواب را باجایگزینی عبارتهای (۱-٦) و (۱-۷) درمعادله دیفرانسیل (۱-٥) تحقیق کرد . درمعادلهٔ (٦ - ۱) ، K ثابتی است که با شرایط اولیه معین میشود . اگر درمعادلهٔ (٦ - ۱) ، $t = 0$ قرار دهیم خواهیم داشت :

$$v_C(0) = K = V_0$$

---

۱ — Exponential



شکل ۳-۱- تخلیه خازن شکل (۲-۱) با یک منحنی نمائی داده شده است .

پس جواب مساله چنین میباشد :

$$v_C(t)=V_0\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t\geqslant 0 \tag{۱ - ۸}$$

باید باین نکته مهم توجه نمود که درمعادلـهٔ (۸ - ۱) ، $v_C(t)$ برای $t\geqslant 0$ معین شده است زیرا بموجب مشخصات فیزیکی اولیه برای $t<0$ ولتاژ دوسرخازن مقداریست ثابت، درصورتیکه از معادلهٔ (۸-۱) ، بدون درنظرگرفتن $t\geqslant 0$ ، حتی برای مقدارهای منفی t یک عبارت نمایی بدست می‌آیـد . درشکـل (۳-۱) ولتاژ v_C بصورت یک تابع زمان رسم شده است. روشن است هرگاه v_C معلوم باشد میتوان سه متغیر دیگر شاخه را بآسانی‌بدست آورد . از معادلهٔ (٤ - ۱ الف) داریم :

$$i_C(t)=C\frac{dv_C}{dt}=-\frac{V_0}{R}\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t\geqslant 0 \tag{۱ - ۹}$$

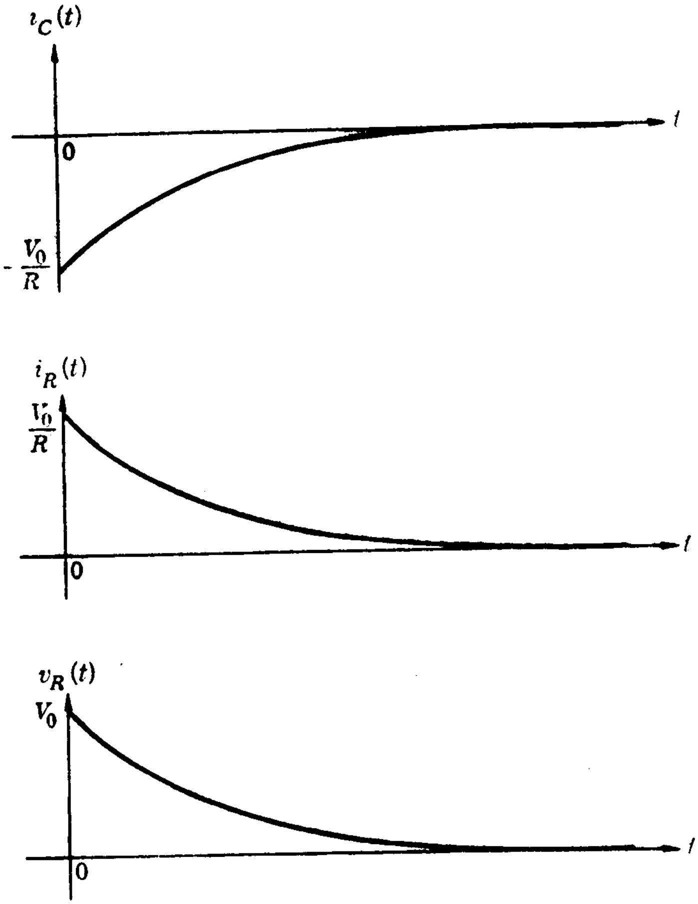
از معادلهٔ (۲-۱) داریم :

$$i_R(t)=-i_C(t)=\frac{V_0}{R}\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t\geqslant 0 \tag{۱ - ۱۰}$$

از معادلهٔ (۳-۱) داریم :

$$v_R(t)=v_C(t)=V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t\geqslant 0 \qquad (1-11)$$

این منحنی‌ها درشکل (۴-۱) رسم شده‌اند .



شکل ۴-۱- متغیرهای شبکه i_C ، i_R و v_R که برای $t\geqslant 0$ نسبت به زمان رسم شده‌اند .

تمرین - ثابت کنید خط راست شکل (۳ - ۱) که در $t=0^+$ برمنحنی $v_C(t)$ مماس است محور زمان را درنقطه‌ای بطول $T=RC$ قطع میکند .

اکنون شکل موج $v_C(0)$ را با دقت بیشتری بررسی میکنیم . همچنانکه درشکل (۳ - ۱) نشان داده شده‌است، گوئیم ولتاژ دوسرخازن بطور نمایی با زمان کاهش می‌یابد. چون منحنی‌های نمایی و مدارهای RC ساده درکارهای روزانه مهندسان برق بسیار دیده میشوند دانستن خواص آنها بطوردقیق بسیار اهمیت دارد . یک منحنی نمایی را می‌توان با دو عدد مشخص کرد . یکی عرض منحنی در زمان مشخص ، مثلاً $t=0$ ، ودیگری **ثابت زمانی**[1] T که با رابطهٔ :

$$f(t)=f(0)\,e^{-\frac{t}{T}}$$

تعریف میشود . درمنحنی شکل(۳-۱) ، $f(0)=V_0$ و $T=RC$ است . شایسته است برخی‌خواص سادهٔ منحنی نمایی را بیادداشت. با فرض $V_0=1$ یعنی $v_C(0)=1$ می‌بینیم که برای $t=T$ داریم :

$$v_C(T)=e^{-1}\approx 0{,}377$$

و برای $t=4T$ داریم :

$$v_C(4T)=e^{-4}\approx 0{,}0184$$

پس در زمانی برابر با ثابت زمانی، منحنی نمایی تقریباً به ۳۸ درصد ودر زمانی برابربا‌چهار برابر ثابت زمانی منحنی نمایی تقریباً به دو درصد مقدار اولیه خود میرسد .

تبصره - درمعادله‌های (۶ - ۱) و (۷ - ۱) بُعد[2] جملهٔ :

$$s_0=-\frac{1}{T}=-\frac{1}{RC}$$

معکوس زمان‌یعنی‌فرکانس بوده وبرحسب‌رادیان برثانیه‌اندازه گیری‌میشود وآنرا «فرکانس طبیعی[3]» مدار می‌خوانند. چنانکه درفصلهای بعدخواهیم‌دید مفهوم «فرکانس طبیعی»

---

۱ — Time constant

۲ — Dimension

۳ — Natural frequency

درمدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان اهمیت بسیار دارد .

تمرین - میدانیم که واحد ظرفیت فاراد و واحد مقاومت اهم است . نشان دهید که واحد $T=RC$ ، ثانیه است .

درتجزیه و تحلیل مدار ، ما تقریباً همواره به رفتار یک متغیر خاص شبکه که **پاسخ** (وگاه خروجی(۱)) نامیده میشود توجه داریم . چنانکه میدانیم متغیرهای شبکه ولتاژ شاخه یا جریان شاخه و یا یک ترکیب خطی ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها است. همچنین ممکن است متغیر یک شبکه بار یک خازن یا شار یک سلف نیز باشد. درمثال بالا، هریک از منحنی‌های شکلهای (۳-۱) و (٤-۱) را میتوان پاسخ شبکه دانست . پاسخهای شبکه عموماً معلول منابع نابسته‌ای که آنها را بعنوان ورودی(۲) درنظر میگیریم ، یا شرطهای اولیه ، و یا هردو میباشند. درمثال بالا ورودی موجود نیست و پاسخ تنها دراثر ولتاژ اولیه خازن بدست آمده است. بدین‌سبب این پاسخ را پاسخ ورودی صفر می‌نامند . درحالت کلی **پاسخ ورودی صفر** به پاسخ شبکه‌ای اتلاق میشود که هیچگونه ورودی نداشته باشد . پاسخ ورودی صفر به شرایط اولیه و مشخصات مدار بستگی دارد . پاسخ ورودی صفر یک مدار سادهٔ RC یک منحنی نمایی است که با فرکانس طبیعی :

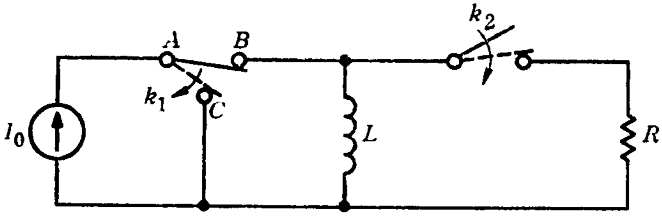
$$s_0 = -\frac{1}{RC}$$

و ولتاژ اولیه V_0 کاملاً مشخص میشود .

۲-۱- مدار RL (مقاومت - سلف)

نوع دیگر مدارمرتبه اول مدار RL است که ما پاسخ ورودی صفرآن را بررسی خواهیم کرد . چنانکه درشکل (۵ - ۱) دیده میشود ، برای $t<0$ کلید k_1 درنقطهٔ B واقع شده است وکلید k_2 باز است و درسلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس L جریان ثابت I_0 برقرار میباشد . درلحظهٔ $t=0$ کلید k_1 را به نقطهٔ C چرخانده k_2 را می‌بندیم . پس برای $t\geqslant 0$ سلفی که جریان اولیه آن I_0 میباشد به مقاومت خطی

۱ — Output ۲ — Input



شکل ۵-۱- برای $t<0$ کلید k_1 نقطه A را به نقطه B وصل نموده و کلید k_2 باز است. پس برای $t<0$ جریان I_0 ازداخل سلف L میگذرد. درلحظه $t=0$ کلید k_1 را به نقطه C چرخانیده و کلید k_2 را می‌بندیم دراینصورت منبع جریان با خود اتصال کوتاه شده وجریان سلف باید ازمقاومت R بگذرد.

تغییرناپذیر بازمان R متصل میشود. انرژی ذخیره شده درمیدان مغناطیسی که درنتیجه جریان I_0 درسلف بوجود آمده بتدریج کاهش یافته بصورت حرارت درمقاومت تلف میشود. جریان درحلقهٔ RL بطور یکنواخت کاهش یافته بالاخره بسوی صفر می‌گراید.

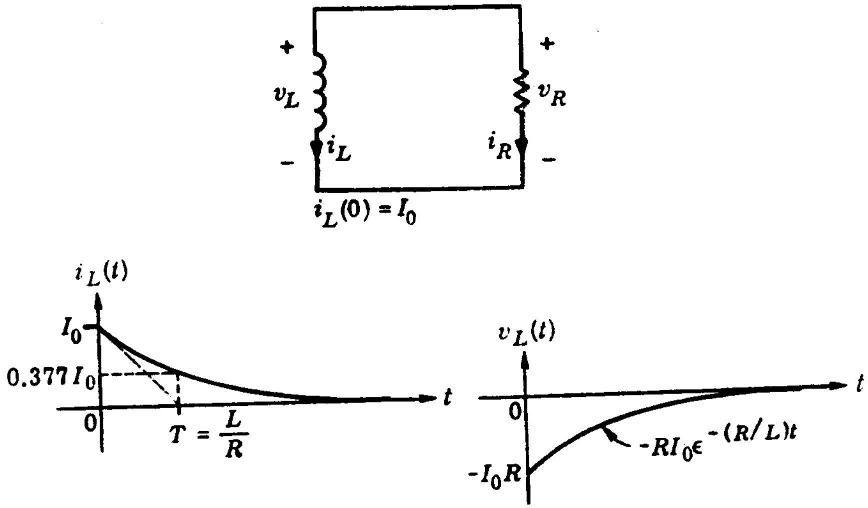
میتوان این‌مدار را بطریق‌مشابه بانوشتن‌قوانین کیرشف ومعادله های شاخه ها تجزیه وتحلیل نمود وبدین‌منظور برای $t \geqslant 0$ بار دیگر مدار را مطابق شکل(۶-۱) رسم‌می‌کنیم. دراین شکل جهت‌های قراردادی ولتاژ و جریان همه شاخه‌ها بخوبی نشان داده شده‌است. با استفاده از قانون جریان کیرشف خواهیم داشت $i_R=-i_L$ و قانون ولتاژ کیرشف بیان میدارد که $v_L-v_R=0$ میباشد. با بکار بردن‌معادله های شاخه برای هردوعنصر یعنی:

$$v_L=L\left(\frac{di_L}{dt}\right) \quad , \quad i_L(0)=I_0 \quad , \quad v_R=R\,i_R$$

معادله دیفرانسیل زیر برحسب جریان i_L بدست می‌آید:

$$L\frac{di_L}{dt}+R\,i_L=0 \qquad t\geqslant 0 \qquad i_L(0)=I_0 \tag{۱-۱۲}$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه اول با ضرایب ثابت، و درست بهمان



شکل ۱-۶- یک مدار RL با $i_L(o)=I_0$
و شکل موجهای آن برای $t\geqslant o$

صورت معادله پیش یعنی(۱-۵) ، میباشد . پس جواب آن‌هم ، بجز طرز نمایش ، بهمان صورت است :

$$i_L(t)=I_0\,e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \qquad t\geqslant o \qquad (۱-۱۳)$$

که درآن $T=\frac{L}{R}$ ثابت زمانی و $s_0\triangleq-\frac{R}{L}$ فرکـانس طبیعی است . نمایش هندسی جریان i_L و ولتاژ v_L درشکل (۱-۶) دیده میشوند .

۱-۳- پاسخ ورودی صفر بصورت تابعی ازحالت اولیه

برای مدارهای RC و RL کـه در بالا در نظرگـرفتیم ، پاسخهـای ورودی صفر بترتیب چنین میباشند :

$$v(t)=V_0\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad i(t)=I_0\,e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t\geqslant o \qquad (۱-۱٤)$$

شرایط اولیه بترتیب با V_0 و I_0 مشخص‌شده‌اندومقادیر V_0 و I_0 بترتیب «حالت‌اولیه[۱]»

۱ —Initial state

مدارهای RC و RL نام دارند . اگر ما نحوهٔ وابستگی شکل موج پاسخ ورودی صفر را به‌حالت اولیه درنظر گیریم به نتیجه زیربرسیم :

« برای مدارهای مرتبه اول خطی تغییرناپذیر با زمان ، پاسخ ورودی صفر که بصورت شکل موج درنظر گرفته شده در فاصلهٔ $o \leqslant t < \infty$ تعریف می‌شود، یک تابع خطی حالت اولیه است . »

اکنون این بیان را با درنظر گرفتن یک مدار RC ثابت می‌کنیم . یعنی میخواهیم نشان دهیم که شکل‌موج $v(\cdot)$ درمعادلهٔ (۱-۱٤) یک‌تابع‌خطی حالت اولیه V_0 میباشد . بدین‌منظور لازم است شرطهای همگنی و جمع‌پذیری تابع تحقیق شوند . (بخش ۳ - ۲ ضمیمه الف دیده شود) . خاصیت همگن بودن آشکار است زیرا اگر حالت اولیه درثابت k ضرب شود از معادلهٔ (۱٤ - ۱) می‌بینیم که تمام شکل موج در ثابت k ضرب میشود . جمع‌پذیری هم بسادگی دیده می‌شود . پاسخ ورودی صفر متناظر با حالت اولیه V'_0 ،

$$v'(t)=V'_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geqslant o$$

و پاسخ ورودی صفر متناظر باحالت اولیه دیگر V''_0 ،

$$v''(t)=V''_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geqslant o$$

و پاسخ ورودی صفر متناظر با حالت اولیهٔ $V'_0+V''_0$ ،

$$(V'_0+V''_0)\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geqslant o$$

میباشد . این شکل موج مجموع دوشکل موج پیش است. پس خاصیت جمع‌پذیری‌برقرار است و چون وابستگی پاسخ ورودی صفر به حالت اولیه واجد شرطهای لازم برای همگنی و جمع‌پذیری است این وابستگی یک تابع خطی میباشد .

تبصره - این‌خاصیت برای مدارهای غیرخطی‌برقرار نیست. برای نشان دادن‌این مطلب مدار RC شکل (۷ - ۱ الف) را درنظر میگیریم. دراینجا خازن خطی و تغییرناپذیر

با زمان باظرفیت یک فاراد ومقاومت غیرخطی با مشخصهٔ $i_R=v_R^3$ میباشد. هردوعنصر دارای ولتاژ شاخهٔ v بوده و اگر جریان شاخه‌ها را برحسب v بیان کنیم از KCL معلوم میشود که

$$C\frac{dv}{dt}+i_R=\frac{dv}{dt}+v^3=0 \qquad v(0)=V_0$$

پس :

$$\frac{dv}{v^3}=-dt$$

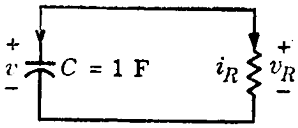
اگر درفاصله 0 و t انتگرال بگیریم، ولتاژ، مقدار اولیه V_0 ومقدار نهائی $v(t)$ را میگیرد و خواهیم داشت :

$$-\frac{1}{2[v(t)]^2}+\frac{1}{2V_0^2}=-t$$

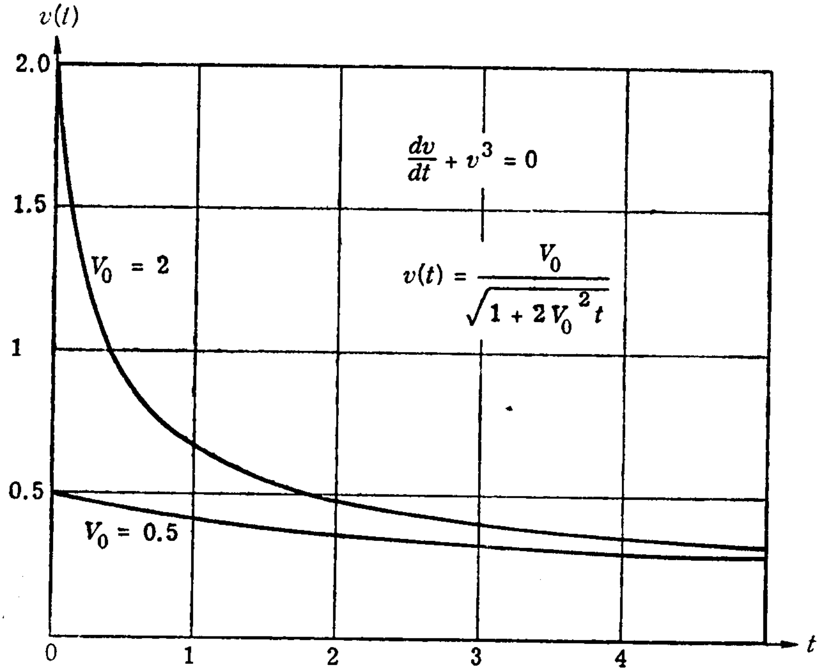
یا :

$$v(t)=\frac{V_0}{\sqrt{1+2V_0^2 t}} \qquad t\geqslant 0 \qquad (1-10)$$

این پاسخ ورودی صفر مدار غیرخطی RC است که در زمان $t=0$ از حالت اولیهٔ V_0 شروع میشود. نمایش هندسی شکل‌موجهای متناظر با $V_0=0{,}5$ و $V_0=2$ در شکل (۱-۷ ب) دیده میشوند. مسلم است که نمیتوان‌منحنی بالا (برای $V_0=2$) را باضرب کردن عرضهای نقطه های منحنی پائین در ٤ بدست آورد. روشن است پاسخ ورودی صفر تابع خطی حالت اولیه نیست. این نکته از لحاظ آزمایشگاهی بسیار مهم است. فرض کنیم در یک گزارش آزمایشگاهی تصویری از پاسخ ورودی صفر یک مدار مرتبه اول که دراسیلوسکوپ دیده میشود، را برای $V_0=1$ داریم. اگر مدار خطی باشد، عرض نقطه های پاسخ ورودی صفر برای هرحالت اولیه دیگر، مثلاً $V_0=k$، درست k برابر عرض نقطه های منحنی است که در دست داریم. درصورتیکه درحالت غیرخطی باید بار دیگر آزمایش کرد یامعادله دیفرانسیل‌متناظر را برای حالت اولیه $V_0=k$ حل نمود.



(الف)

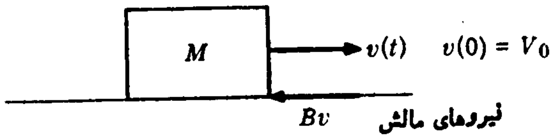


(ب)

شکل ۷-۱- مدار غیرخطی RC و دو پاسخ ورودی صفر آن . خازن خطی است وظرفیت $C=۱$ فاراد دارد . مشخصه مقاومت غیرخطی $i_R = v_R^3$ میباشد .

٤-۱- مثال مکانیکی

اکنون یک سیستم مکانیکی راکه با آن آشنایی داریم درنظر میگیریم که رفتاری مشابه مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان RL و RC که دربالا دیدیم داشته باشد . درشکل (۸ - ۱) جسمی بجرم M که درلحظهٔ $t=0$ با سرعت اولیه V_0 حرکت میکند



شکل ۸-۱- یک سیستم مکانیکی که با معادله دیفرانسیل مرتبه اول توصیف میشود .

دیده میشود . سرعت حرکت این جسم بعلت مالش(۱) بتدریج کاهش می‌یابد . مالش را همواره با نیروهای مالش که درجهت مخالف سرعت v ، مطابق شکل (۸ - ۱) ، اثر میکنند نشان‌میدهند . گیریم که این نیرو متناسب با اندازهٔ سرعت یعنی $f=Bv$ باشد که درآن ثابت B را ضریب میرائی(۲) گویند . از قانون دوم حرکت نیوتن برای $t\geqslant 0$ داریم :

$$M\frac{dv}{dt}=-Bv \qquad v(0)=V_0 \tag{۱-۱۶}$$

و بنابراین :

$$v(t)=V_0\, e^{-\left(\frac{B}{M}\right)t} \qquad t\geqslant 0 \tag{۱-۱۷}$$

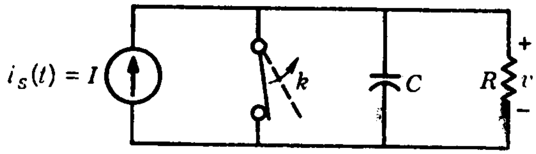
که درآن $\frac{M}{B}$ نمایش ثابت زمانی سیستم مکانیکی و $-\frac{B}{M}$ فرکانس طبیعی‌است .

۲- پاسخ حالت صفر

۱-۲- ورودی جریان ثابت

درمدار شکل (۱-۲) منبع‌جریان i_s با کلید k به مدار RC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان متصل شده است . برای سادگی نخست حالتی را درنظر میگیریم که درآن جریان i_s ثابت و برابر I است. پیش از باز شدن کلید، منبع جریان درمدار اتصال کوتاه ، جریان گردشی(۳) بوجود می‌آورد. درلحظهٔ $t=0$ کلید باز شده، منبع جریان به مدار RC وصل

۱ — Friction ۲ — Damping ۳ — Circulating Current



شکل ۱-۲- مدار RC با ورودی منبع جریان . درلحظه $t=o$ کلید باز میشود .

میشود . از KVL می‌بینیم که ولتاژ دوسر هرسه عنصر یکی است . این ولتاژ را با v نشان داده وفرض‌میکنیم v پاسخ موردنظر باشد. بانوشتن KCL برحسب v معادله زیر:

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=i_s(t)=I \qquad t\geqslant o \tag{۲-۱}$$

که درآن I یک ثابت است برای شبکه بدست می‌آید . فرض میکنیم خازن بدون باراولیه باشد پس شرط اولیه چنین خواهد بود :

$$v(o)=o \tag{۲-۲}$$

پیش ازحل معادله‌های (۱ - ۲) و (۲ - ۲) آنچه راکه پس از بازشدن کلید روی خواهد داد بررسی‌می‌کنیم. درلحظهٔ $t=o^+$ ، یعنی‌درست پس‌از بازشدن کلید، بموجب آنچه درفصل ۲ گفتیم ، چون ولتاژ دوسر خازن نمی‌تواند جهش ناگهانی داشته باشد مگر اینکه جریان بی‌نهایت بزرگی درآن برقرار شود، ولتاژ دوسرخازن صفراست، وچون درلحظهٔ $t=o^+$ ، ولتاژ دوسرخازن‌هنوز صفراست بموجب قانون‌اهم جریان داخل مقاومت هم باید برابر صفر باشد . پس ، دراین لحظه همه جریان منبع وارد خازن میگردد . بموجب معادلهٔ (۱ - ۲) این عمل موجب افزایش ولتاژ میشود و درنتیجه داریم :

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{o^+}=\frac{I}{C} \tag{۲-۳}$$

باگذشت زمان v افزایش یافته و $\frac{v}{R}$ ، جریان‌داخل‌مقاومت نیز افزایش می‌یابد . مدتی درازپس از بازشدن کلید، خازن کاملاً پر شده ولتاژ عملاً ثابت میماند و پس ازآن

$\frac{dv}{dt} \approx 0$ است و همهٔ جریان منبع از داخل مقاومت گذشته و خازن مانند یک مدار باز عمل می‌کند ، یعنی :

$$v \approx RI \qquad (۲-۴)$$

این نتیجه از معادلهٔ (۱ - ۲) نیز برمی‌آید و درشکل (۲ - ۲) نیز نشان داده شده است و گوئیم مدار « بحالت دائمی[۱] » رسیده است . اکنون تنها باید نشان داد که تغییر کلی ولتاژ چگونه انجام میگیرد . بدین‌منظور از روش تحلیلی زیر استفاده می کنیم.

جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی و ناهمگن را میتوان بصورت زیر نوشت :

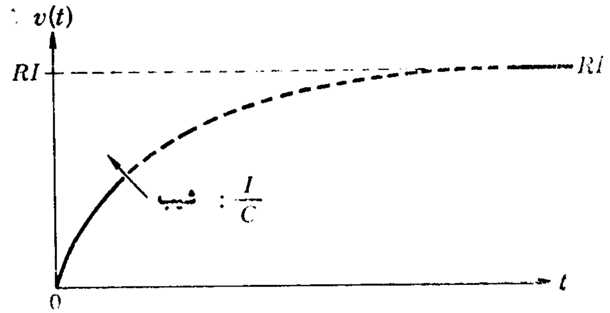
$$\boxed{v = v_h + v_p} \qquad (۲-۵)$$

که درآن v_h یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل همگن و v_p ، یک‌جواب‌خاص‌معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن است . البته v_p به‌ورودی مدار بستگی‌دارد . دراین مسأله جواب عمومی معادلهٔ همگن چنین است :

$$\boxed{v_h = K_1 e^{s_0 t}} \quad s_0 = -\frac{1}{RC} \qquad (۲-۶)$$

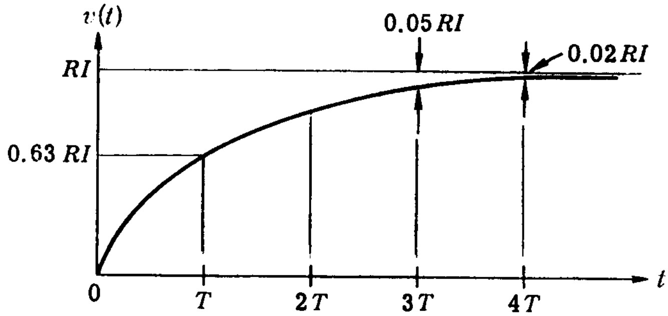
که درآن K_1 ثابتی‌است دلخواه . برای یک ورودی‌جریان ثابت مناسب‌ترین جواب‌خاص یک مقدار ثابت است :

$$\boxed{v_p = RI} \qquad (۲-۷)$$



شکل ۲-۲- رفتار اولیه و نهائی ولتاژ دوسرخازن

۱ — Steady state



شکل ۳-۲- پاسخ ولتاژ مدار RC ناشی ازمنبع ثابت I چنانکه درشکل (۱-۲) با $v(o)=o$ نشان داده شده است .

زیرا ثابت RI معادله دیفرانسیل (۱ - ۲) را برمی‌آورد . با جایگزینی روابط (۶ - ۲) و (۷ - ۲) در رابطه (۵ - ۲) جواب کلی معادلهٔ (۱ - ۲) بدست می‌آید :

$$\boxed{v(t)=K_1\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}+RI} \qquad t\geqslant o \qquad (۲-۸)$$

که درآن K_1 را باید از شرط اولیه‌ای که با معادلهٔ (۲-۲) مشخص میشود بدست آورد . با قراردادن $t=o$ درمعادلهٔ (۸ - ۲) چنین داریم :

$$v(o)=K_1+RI=o$$

پس :

$$K_1=-RI \qquad (۲-۹)$$

بنابراین عبارت ولتاژ بصورت تابعی از زمان چنین میباشد .

$$\boxed{v(t)=RI\left(1-e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right)} \qquad t\geqslant o \qquad (۲-۱۰)$$

منحنی شکل(۳-۲) نشان میدهد چگونه ولتاژ بطور نمایی بمقدار حالت دائمی خود نزدیک میشود . درزمانی درحدودچهاربرابر ثابت زمانی‌مدار ، ولتاژبمقداری‌میرسد که تقریباً ۲ درصد با مقدار نهایی RI متفاوت است .

تمرین ۱- پاسخ حالت صفر مدار شکل (۱-۲) را با مقیاسی مناسب برای حالتهای زیر رسم کنید:

الف: $I=200\ mA$ ، $R=1k\Omega$ (۱۰^۳ اهم) و $C=1\mu F$ (۱۰^-۶ فاراد)

ب: $I=2\ mA$ ، $R=50\ \Omega$ و $C=5\ nF$ (۱۰^-۹ فاراد)

تمرین ۲- درباره پرشدن خازن مدار شکل (۱-۲) از لحاظ انرژی بحث کنید. بگفته دقیقتر،

الف - شکل موجهای $p_s(\cdot)$ (توانی که منبع تحویل داده است) و $p_R(\cdot)$ (توان تلف شده درمقاومت) و $\mathcal{E}_C(\cdot)$ (انرژی ذخیره شده درخازن) را محاسبه کرده منحنی های آنها را رسم کنید.

ب - بازده این عمل یعنی نسبت انرژی که سرانجام درخازن ذخیره می‌شود به انرژی که منبع تحویل میدهد (یعنی $\int_0^\infty p_s(t)\,dt$) را حساب کنید.

۲-۲- ورودی سینوسی

اکنون همان مدار را با ورودی متفاوتی درنظر میگیریم. فرض کنیم منبع بارابطه سینوسی زیر داده شده باشد:

$$i_s(t)=A_1\cos(\omega t+\Phi_1) \qquad t\geqslant 0 \qquad (2-11)$$

دراین رابطه ثابت A_1 را «دامنه» وثابت ω را «فرکانس (زاویه‌ای) ورودی سینوسی مینامند. فرکانس برحسب رادیان برثانیه اندازه گرفته میشود. ثابت Φ_1 را «فاز[1]» گویند. اکنون به‌حل این‌معادله که تعبیرفیزیکی آن‌را دربخش بعدخواهیم دیدمی‌پردازیم. چون دراین‌حالت بجز ورودی بقیه مدار مانند حالت پیش است جواب معادله دیفرانسیل همگن بهمان‌صورت پیش میباشد (معادلهٔ (۲-۶)). پس لازم‌است که تنها برای ورودی سینوسی یک جواب خاص بیابیم. شایسته‌ترین جواب خاص یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت برای یک ورودی سینوسی، یک تابع سینوسی با همان فرکانس است.

1 — Phase

ازاینرو v_p را باید بدین‌صورت نوشت :

$$v_p(t)=A_2\cos(\omega t+\Phi_2) \qquad (۲-۱۲)$$

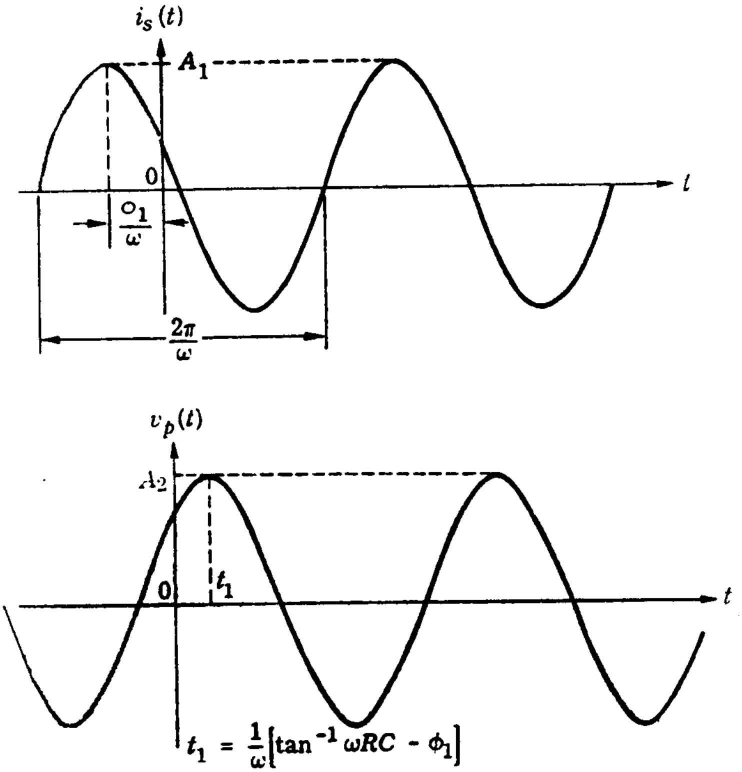
که درآن A_2 و Φ_2 ثابت‌هائی هستندکه باید تعیین کرد . بدین‌منظور رابطهٔ (۱۲-۲) را در معادلهٔ دیفرانسیل زیر میگذاریم .

$$C\frac{dv_p}{dt}+\frac{1}{R}v_p=A_1\cos(\omega t+\Phi_1) \qquad (۲-۱۳)$$

که خواهیم داشت :

$$-CA_2\,\omega\sin(\omega t+\Phi_2)+\frac{1}{R}A_2\cos(\omega t+\Phi_2)=A_1\cos(\omega t+\Phi_1)$$

برای همه $t\geqslant 0$



شکل ۴-۲- جریان ورودی و یک جواب ویژه برای ولتاژ خروجی مدار RC شکل (۱ - ۲)

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی وگسترش عبارتهای $\sin(\omega t+\Phi_2)$ ، $\cos(\omega t+\Phi_2)$ و $\cos(\omega t+\Phi_1)$ برحسب ترکیب خطی $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ و برابر گذاردن جداگانه ضریبهای $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ این نتیجه‌ها بدست می‌آیند :

$$A_2=\frac{A_1}{\sqrt{(1/R)^2+(\omega C)^2}} \qquad (۲-۱۴)$$

و :

$$\Phi_2=\Phi_1-\tan^{-1}\omega RC \qquad (۲-۱۵)$$

دراینجا $\tan^{-1}\omega RC$ نمایش زاویه‌ایست درفاصلهٔ ۰ تا ۹۰° که تانژانت آن برابر ωRC است . این جواب خاص و جریان ورودی درشکل (۲-۴) رسم شده‌اند . درفصل هفتم روشی کلی‌تر و زیباتر برای یافتن این جواب خاص خواهیم دید.

تمرین- معادله‌های (۲-۱۴) و (۲-۱۵) را به تفصیل بدست آورید .

بنابراین جواب کلی معادلهٔ (۲-۱۳) چنین است :

$$v(t)=K_1 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}+A_2\cos(\omega t+\Phi_2) \qquad t\geqslant 0 \qquad (۲-۱۶)$$

با گذاشتن $t=0$ خواهیم داشت :

$$v(0)=K_1+A_2\cos\Phi_2=0 \qquad (۲-۱۷)$$

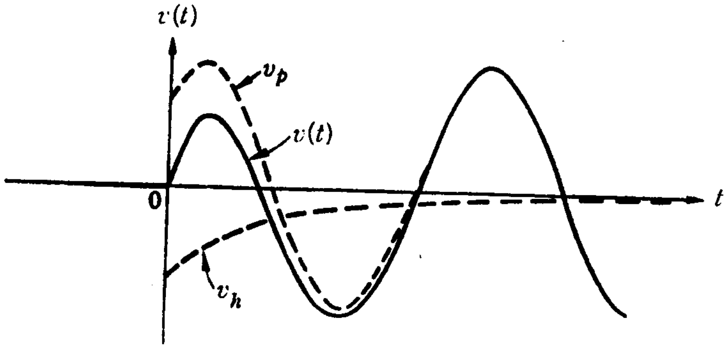
یعنی :

$$K_1=-A_2\cos\Phi_2 \qquad (۲-۱۸)$$

پس پاسخ چنین خواهد بود :

$$\boxed{v(t)=-A_2\cos\Phi_2\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}+A_2\cos(\omega t+\Phi_2) \qquad t\geqslant 0} \qquad (۲-۱۹)$$

که درآن A_2 و Φ_2 درمعادله‌های (۲-۱۴) و (۲-۱۵) تعریف شده‌اند . منحنی v یعنی پاسخ حالت صفر به‌ورودی $A_1\cos(\omega t+\Phi_1)$ درشکل (۲-۵) دیده میشود .



شکل ۵-۲- پاسخ ولتاژ مدار شکل (۱-۲) با $v(0)=0$
و $i_s(t)=A_1\cos(\omega t+\Phi_1)$

در دوحالتی که دراین بخش دیدیم ولتاژ v را پاسخ و منبع جریان i_s را ورودی درنظر گرفتیم . شرط اولیه درمدار صفر بوده یعنی پیش از وارد آوردن ورودی، ولتاژ دوسر خازن برابر با صفر بود . درحالت کلی اگر همه شرطهای اولیه درمدار صفر باشند گوئیم مدار در **حالت صفر**(۱) است+ . پاسخ مداری که ازحالت صفر شروع میکند منحصراً معلول ورودی آنست. بموجب تعریف، **پاسخ حالت صفر** یک مدار پاسخ آن به یک ورودی است که در زمان دلخواه t_0 بمدار وارد شود بشرط آنکه مدار درست پیش از وارد آوردن این ورودی (یعنی در زمان t_0-) درحالت صفر باشد . درمحاسبهٔ پاسخ حالت صفر هدف اصلی، رفتار پاسخ برای $t\geqslant t_0$ است. بدین‌منظورچنین «قرار میگذاریم» : برای $t<t_0$ ورودی و پاسخ حالت صفر را متحد باصفر میگیریم .

+ درفصل سیزدهم ثابت خواهیم کرد که اگر ولتاژ دوسرهمه خازنها وجریان‌اولیه داخل همه سلفهای یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان برابر صفر باشد این مدار درحالت صفر خواهد بود .

۱ — Zero State

۳- پاسخ کامل : حالت گذرا و حالت دائمی

۱-۳- پاسخ کامل

پاسخ یک مدار به تحریک ورودی وشرطهای اولیه رویهم، پاسخ کامل[۱] نام‌دارد. بنابراین پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر حالتهای خاص پاسخ کامل هستند. دراین بخش نشان خواهیم داد که :

« برای مدار ساده خطی تغییرناپذیر با زمان RC پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر آن مدار+. »

مدار شکل (۱-۳) ، که درآن خازن دارای بار اولیه میباشد یعنی :

$$v(0)=V_0\neq 0$$

را درنظرگرفته یک ورودی جریان درلحظهٔ $t=0$ بمدار وصل میکنیم . بموجب تعریف، پاسخ کامل شکل موج $v(\cdot)$ است که معلول تحریک ورودی $i_s(\cdot)$ و حالت اولیه V_0 رویهم میباشد . از لحاظ ریاضی این پاسخ جواب معادله زیر است :

$$C\frac{dv}{dt}+Gv=i_s(t) \qquad t\geqslant 0 \qquad (۳-۱)$$

با شرط

$$v(0)=V_0 \qquad (۳-۲)$$

که درآن V_0 ولتاژ اولیه دوسر خازن است . گیریم v_i پاسخ ورودی صفر باشد ، بنا به تعریف v_i جواب معادله زیر است :

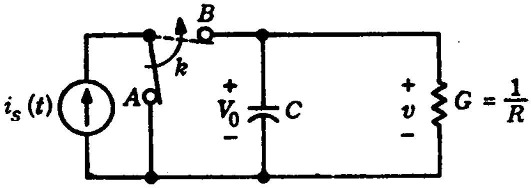
$$C\frac{dv_i}{dt}+Gv_i=0 \qquad t\geqslant 0$$

با شرط

$$v_i(0)=V_0$$

+ درواقع این بیان برای هرمدارخطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر بازمان) درست است .

۱ — Complete Response



شکل ۱-۳- مدار RC با $v(o)=V_0$ با یک منبع جریان $i_s(t)$ تحریک میشود. درلحظه $t=o$ کلید k ازنقطه A به نقطه B چرخانیده میشود .

گیریم v_0 پاسخ حالت صفر باشد . بنا بتعریف ، این پاسخ جواب معادله زیر است :

$$C\frac{dv_0}{dt}+Gv_0=i_s(t) \qquad t\geqslant o$$

با شرط

$$v_0(o)=o$$

ازجمع این چهار معادله میتوان معادله زیر را بدست آورد :

$$C\frac{d}{dt}(v_i+v_0)+G(v_i+v_0)=i_s(t) \qquad t\geqslant o$$

با شرط

$$v_i(o)+v_0(o)=V_0$$

اما چنانکه ازاین دومعادله برمی‌آید شکـل موج $v_i(\cdot)+v_0(\cdot)$ هم معادله دیفرانسیل (۱-۳) وهم شرطهای اولیهٔ(۲-۳) را برمی‌آورد. وچون جواب معادلهٔ دیفرانسیلی بصورت (۱-۳) با شرطهای اولیه (۲ - ۳) یکتا است ، جواب کامل پاسخ v بدین‌صورت میباشد :

$$v(t)=v_i(t)+v_0(t) \qquad t\geqslant o$$

یعنی پاسخ کامل v برابر بامجموع پاسخ‌ورودی صفر v_i وپاسخ‌حالت صفر v_0 میباشد.

مثال- گیریم ورودی یک مدار RC منبع جریان ثابت $i_s=I$ باشد که درلحظهٔ $t=o$ وارد میشود . میتوان بآسانی پاسخ کامل مدار را نوشت زیرا پاسخ ورودی صفر و

پاسخ حالت صفر را محاسبه کرده‌ایم . پس :

$$v(t)=v_i(t)+v_0(t) \qquad t\geqslant 0$$

از معادلهٔ (۸-۱) چنین داریم :

$$v_i(t)=V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t\geqslant 0$$

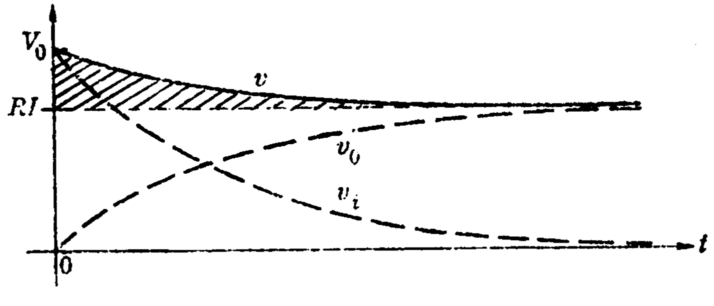
همچنین از معادلهٔ (۱۰-۲) چنین داریم :

$$v_0(t)=RI\left(1-e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right) \qquad t\geqslant 0$$

درنتیجه پاسخ کامل چنین است :

$$\underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{پاسخ ورودی صفر } v_i} + \underbrace{RI\left(1-e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right)}_{\text{پاسخ حالت صفر } v_0} \qquad t\geqslant 0 \qquad (۳-۲)$$

پاسخها درشکل (۲-۳) نشان داده شده‌اند .



شکل ۲-۳- پاسخ ورودی صفر ، پاسخ حالت صفر وپاسخ کامل یک مدار ساده RC . تحریک ورودی یک منبع جریان ثابت است که در $t=0$ اعمال میشود .

مسلم است که از لحاظ محاسباتی محض، یافتن پاسخ کامل مستلزم حل معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن با شرطهای اولیهٔ معین است و ممکن است نیازی به تجزیهٔ آن بصورت پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر نباشد . ازسوی دیگر از لحاظ فیزیکی، این نکته که پاسخ کامل برابر است بامجموع پاسخ حالت صفر (معلول ورودی تنها) وپاسخ ورودی صفر (معلول شرطهای اولیه) بسیار جالب است و این تجزیه یک نتیجهٔ اساسی نظریه مدار و در واقع نظریه سیستمهای خطی میباشد .

تبصره - ما درفصل ششم ثابت خواهیم کرد که برای مدار RC موازی‌خطی تغییر ناپذیر بازمان ، و برای ورودی دلخواه i_s ، میتوان‌پاسخ کامل را صریحاً بدین‌صورت نوشت:

$$\underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{C} e^{-\left(\frac{t-t'}{RC}\right)} i_s(t')\,dt'}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

تمرین- با جایگزینی مستقیم نشان دهید که عبارت پاسخ کامل که دربالا داده شده است معادله‌های (۳-۱) و (۳-۲) را برمی‌آورد .

۲-۳- حالت گذرا وحالت دائمی

درمثال پیش میتوان پاسخ کامل را با راهی دیگر تجزیه نمود . پاسخ کامل‌معلول حالت اولیهٔ V_0 و ورودی جریان ثابت I درمعادله (۳-۳) چنین نوشته میشود :

$$\underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{(V_0 - RI)e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{حالت گذرا}} + \underbrace{RI}_{\text{حالت دائمی}} \qquad t \geqslant 0 \qquad (۳-٤)$$

همچنانکه درقسمت هاشور زده شکل (۳-۲) نشان داده شده است جملهٔ اول یعنی تفاضل شکل موج $v(0)$ و ثابت RI یک تابع نمایی میرا[1] است . برای مقادیر بزرگ t جملهٔ

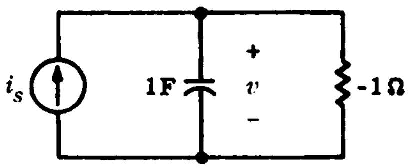
1 — Decaying

اول ناچیز و جمله دوم ازآن بسیار بزرگتراست. بدین سبب جمله اول را «حالت گذرا(۱)» و جمله دوم را « حالت دائمی(۲) » گویند . دراین‌مثال واضح است که پاسخ حالت صفر وپاسخ ورودی صفر هردو درحالت گذرا سهیم هستند درصورتیکه حالت دائمی تنها محلول پاسخ حالت صفر میباشد. از لحاظ فیزیکی حالت گذرا نتیجهٔ دوعلت است ، یکی شرطهای اولیه درمدار و دیگری وارد آمدن ناگهانی ورودی . و اگر رفتار مدار با پیشرفت زمان خوب باشد این حالت گذرا کم کم ازمیان‌میرود وحالت دائمی تنها معلول تحریک ورودی، دارای شکل موجی است که با شکل موج ورودی ارتباط بسیار نزدیک دارد . مثلاً اگر ورودی‌ثابت باشد پاسخ‌حالت‌دائم نیزمقداری‌است ثابت‌واگر ورودی یک‌سینوسی بافرکانس ω باشد پاسخ حالت دائمی نیز یک سینوسی با همان فرکانس خواهد بود . درمثال بخش (۲-۲) ورودی برابر با $i_s = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1)$ و پاسخ آن (همچنانکه از معادلهٔ (۲-۱۹) برمی‌آید) دارای جزء حالت دائمی $A_2 \cos(\omega t + \Phi_2)$ و جزء گذرای :

$$-A_2 \cos \Phi_2 \, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}$$

میباشد . بحث کامل حالتهای گذرا و دائمی درفصل هفتم دیده خواهد شد .

تمرین- مداری که‌درشکل(۲-۳) دیده میشود دارای یک‌خازن خطی یک فارادی و یک مقاومت خطی با مقاومت منفی ۱ — اهم است. درلحظهٔ $t=0$ هنگامی که منبع جریان وارد میشود مدار درحالت صفر است ، چنانکه برای $t \geqslant 0$ داریم $i_s = I_m \cos \omega t$ (I_m و ω مقادیر ثابتی هستند) . پاسخ v را محاسبه ورسم کنید . آیاحالت دائمی‌سینوسی وجود دارد ؟ توضیح دهید .



شکل ۲-۳- تمرین حالت دائمی. توجه کنید که مدار دارای یک مقاومت ، با مقاومت « منفی » است .

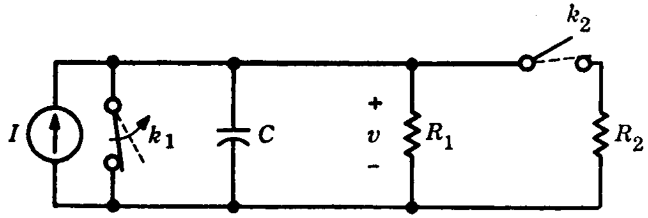
---

۱ — Transient State ۲ — Steady State

تبصره- تذکر این نکته حائزاهمیت است که گاه میتوان باورودی سینوسی وانتخاب لحظهٔ خاصی برای وارد نمودن این ورودی، حالت گذرا را کاملاً حذف کرد. ما این نتیجه را با همان مثال بخش (۲-۲) نشان خواهیم داد. چنانکه میدانیم مسأله موردنظر تعیین پاسخ حالت صفر یک مدار RC به ورودی جریـان $A_1 cos(\omega t+\Phi_1)$ بود. جواب این مسأله بصورت معادلهٔ(۲-۱۶) و برحسب ثابت K_1 بدست آمده بود ولی بایستی این ثابت را با شرطهای اولیه تعیین کرد. واضح است که اگر K_1 صفر باشد حالت گذرایی وجود نداشته و v درمعادلهٔ(۲-۱۶) یک سینوسی‌محض خواهد بود. چنانکه می‌بینیم در معادلهٔ (۲-۱۷)، K_1 به ولتاژ اولیه دوسرخازن وهم‌چنین به مقدار شکـل موج ورودی در لحظهٔ $t=o$ بستگی‌دارد. درواقع اگر وتنها اگر، $\Phi_2=\pm ۹۰°$ باشد $K_1=o$ خواهدبود. ازلحاظ فیزیکی این بدان معنی‌است که اگر درلحظهٔ $t=o$، ولتاژ حالت‌دائمی دوسرخازن یعنی، $A_2 cos\, \Phi_2$ برابر ولتاژ اولیه دوسرآن یعنی، $v(o)$ باشد پاسخ‌حالت صفر، حالت گذرایی نخواهد داشت. برای آنکه $\Phi_2=\pm ۹۰°$ باشد، معادلهٔ (۲-۱۵) مستلزم آنست که فاز تحریک ورودی برابر $\pm ۹۰°+tan^{-1}\omega CR$ انتخاب شود. میتوان از این بحث چنین نتیجه گرفت که اگر در لحظهٔ $t=o$ ولتاژ دوسر خازن معین باشد وارد آوردن ناگهانی منبع جریان سینوسی یک حالت گذرا بوجود می‌آورد مگراینکه دامنه و فاز ورودی سینوسی بطورمناسب‌طوری تنظیم شوندکه جزء حالت دائمی v درلحظهٔ $t=o$ برابر ولتاژ اولیهٔ دوسر خازن گردد.

۳-۳- مدارهای با دو ثابت زمانی

اغلب درمدارهایی کـه کلید قطع و وصل دارند مسأله هایی شامل محاسبهٔ حالتهای گذرا پیش می‌آیند، واکنون می‌خواهیم چنین‌مسائلی را با مداری که درشکل(۳-٤) نشان داده شده است مطالعه‌کنیم. گیریم خـازن و مقاومتها خطی و تغییرناپذیر با زمان و خازن بدون بـار اولیه است. برای $t<o$ کلید k_1 بسته وکلید k_2 بـاز است. در $t=o$ کلید k_1 را بازکرده منبع جریان ثابت را بمدار موازی R_1C وصل می‌کنیم. خازن بتدریج با ثابت زمانی $T_1\triangleq R_1C$ پر می‌شود. اکنون گیریم که در زمان $t=T_1$ کلید k_2 بسته شود. می‌خواهیم شکل موج ولتاژ را در دوسرخازن، برای $t\geqslant o$ بدست‌آوریم. میتوان‌مسأله‌را به‌دوجزء تقسیم‌نمود: یکی‌فاصله $[o\, , T_1]$ و دیگری فاصلهٔ $[T_1\, , \infty)$.



شکل ۴-۳- یک مسأله حالت گذرای ساده . درلحظه $t=0$ کلید k_1 باز شده و درلحظه $t=T_1 \triangleq R_1C$ کلید k_2 بسته میشود .

نخست ولتاژ را درفاصلهٔ $[0\ ,\ T_1]$ ، پیش‌از اینکه کلید k_2 بسته شود تعیین میکنیم . بنا بفرض چون $v(0)=0$ است میتوان پاسخ حالت صفر را فوراً تعیین نمود . درنتیجه

$$v(t)=\begin{cases} 0 & t\leqslant 0 \\ R_1 I\left(1-e^{-\frac{t}{T_1}}\right) & 0\leqslant t\leqslant T_1 \end{cases} \qquad (۳-۵)$$

درلحظهٔ $t=T_1$:

$$v(T_1)=R_1 I\left(1-\frac{1}{e}\right) \qquad (۳-۶)$$

این ، شرط اولیه قسمت دوم مسأله است. چون کلید k_2 برای $t>T_1$ بسته است یک ترکیب موازی C و R_1 و R_2 داریم و ثابت زمانی این مدار چنین است :

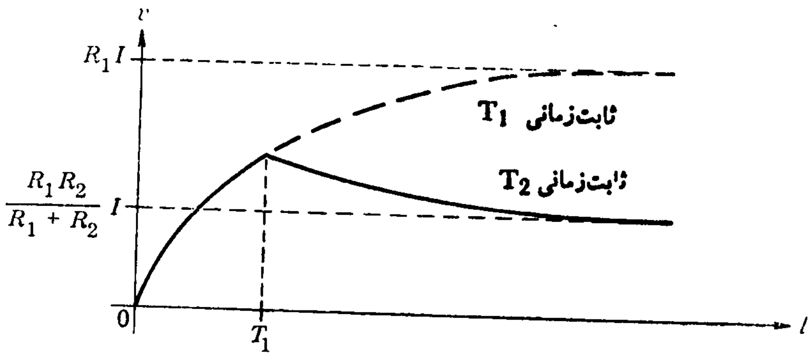
$$T_2=C\left(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\right) \qquad (۳-۷)$$

و تحریک ورودی I میباشد . برای $t\geqslant T_1$ پاسخ کامل این قسمت دوم چنین است :

$$v(t)=R_1 I\left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-\frac{t-T_1}{T_2}}+ \qquad (۳-۸)$$

$$\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} I\left(1-e^{-\frac{t-T_1}{T_2}}\right) \qquad t\geqslant T_1$$

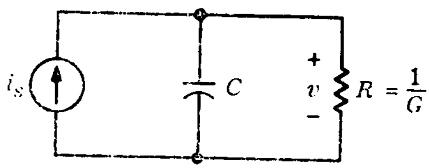
شکل موج $v(\cdot)$ درشکل (۳-۵) دیده میشود .



شکل ۵-۳- شکل موج ولتاژ برای مدار شکل (۴-۳)

۴- خطی بودن پاسخ حالت صفر

مسلم است که پاسخ حالت‌صفر «هر» مدار خطی یک تابع خطی تحریک ورودی‌است، یعنی وابستگی شکل موج پاسخ حالت صفر به شکل موج تحریک ورودی با یک تابع خطی بیان میشود. باید دانست که هرمنبع نابسته دریک مدار خطی بعنوان ورودی درنظر گرفته میشود. اکنون این نتیجه را با مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RC که در بالا دیدیم تشریح می‌کنیم (به شکل (۴-۱) مراجعه شود) . گیریم ورودی آن شکل موج جریان $i_s(\cdot)$ و پاسخ آن شکل موج ولتاژ $v(\cdot)$ باشد . میخواهیم مطلب زیر را بطور مشروح نشان دهیم :



شکل ۴-۱- مدار خطی تغییرناپذیر با زمان
با ورودی i_s و پاسخ v

« پاسخ حالت صفر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RC موازی (که درشکل (۴-۱) دیده میشود) یک تابع خطی تحریک ورودی است، یعنی وابستگی شکل موج پاسخ حالت صفر به شکل موج تحریک ورودی دارای خاصیتهای جمع‌پذیری و همگنی است » .

۱- نخست درجمع پذیری بررسی میکنیم . دو جریان ورودی i_1 و i_2 را که هردو درلحظهٔ t_0 وارد میشوند درنظر میگیریم. میدانیم که منظور از i_1 (و همچنین i_2) شکل موج جریانی‌است که درلحظهٔ t_0 شروع شده و ازآن پس ادامه می‌یابد . پاسخهای حالت صفر متناظر را v_1 و v_2 می‌نامیم. بموجب تعریف، v_1 جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

$$C\frac{dv_1}{dt}+Gv_1=i_1(t) \qquad t\geqslant t_0 \tag{۴-۱}$$

با شرط

$$v_1(t_0)=0 \tag{۴-۲}$$

بطریقی مشابه ، v_2 جواب یکتای معادله دیفرانسیل زیر است :

$$C\frac{dv_2}{dt}+Gv_2=i_2(t) \qquad t\geqslant t_0 \tag{۴-۳}$$

با شرط

$$v_2(t_0)=0 \tag{۴-۴}$$

از جمع معادله‌های (۴-۱) و (۴-۳) وبا درنظرگرفتن (۴-۲) و (۴-۴) می‌بینیم که تابع v_1+v_2 معادلهٔ زیر را برمی‌آورد :

$$C\frac{d}{dt}(v_1+v_2)+G(v_1+v_2)=i_1(t)+i_2(t) \qquad t\geqslant t_0 \tag{۴-۵}$$

با شرط

$$v_1(t_0)+v_2(t_0)=0 \tag{۴-۶}$$

اکنون گوئیم که بموجب تعریف، پاسخ حالت‌صفر ورودی i_1+i_2 ، که درلحظهٔ $t=t_0$ وارد می‌شود جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

$$C\frac{dy}{dt}+Gy=i_1(t)+i_2(t) \qquad t\geqslant t_0 \tag{۴-۷}$$

با شرط

$$y(t_0)=0 \tag{۴-۸}$$

با استفاده ازقضیه یکتایی[1] درموردجواب این‌معادله دیفرانسیل وبامقایسهٔ (۴-۵) و (۴-۶) با (۴-۷) و (۴-۸) باین نتیجه میرسیم که شکل موج $v_1(\cdot)+v_2(\cdot)$ ، پاسخ حالت صفر شکل موج ورودی $i_1(\cdot)+i_2(\cdot)$ است وچون این استدلال برای «هر» ورودی دلخواه i_1 و i_2 که در «هر» لحظه دلخواه t_0 وارد شوند برقرار است ، معلوم میشود که «پاسخ‌حالت صفر مدار RC تابعی از تحریک ورودی است که دارای خاصیت جمع‌پذیری است.»

۲- اکنون همگنی را بررسی میکنیم . تحریک ورودی i_1 (که در زمان t_0 وارد میشود) وتحریک ورودی ki_1 که‌درآن k ثابت حقیقی دلخواهی است را درنظر میگیریم . بموجب تعریف، پاسخ‌حالت‌صفر دراثرورودی i_1 معادله های(۴-۱) و (۴-۲) را برمی‌آورد. بطریقی مشابه ، پاسخ حالت صفر دراثر ورودی ki_1 معادلهٔ دیفرانسیل زیر را برمی‌آورد:

$$C\frac{dy}{dt}+Gy=ki_1(t) \qquad t\geqslant t_0 \tag{۴-۹}$$

با شرط

$$y(t_0)=0 \tag{۴-۱۰}$$

چون (۴-۱) و (۴-۲) را در «ثابت» k ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$C\frac{d}{dt}(kv_1)+G(kv_1)=ki_1(t) \qquad t\geqslant 0 \tag{۴-۱۱}$$

با شرط

$$kv_1(t_0)=0 \tag{۴-۱۲}$$

اگر این چهار معادله را با یکدیگرمقایسه کنیم، با استفاده ازقضیه یکتایی جواب معادله های

---

۱ — Uniqueness theorem

دیفرانسیل معمولی ، باین نتیجه میرسیم که پاسخ حالت صفر دراثر تحریک ki_1 برابر است با kv_1 ، وچون این استدلال برای «هر» شکل موج ورودی دلخواه $i_1(\cdot)$ و «هر» زمان اولیه دلخواه t_0 و «هر» ثابت دلخواه k برقراراست، پس معلوم می‌شود که «پاسخ حالت صفر یک مدار RC تابعی از تحریک ورودی است که دارای خاصیت همگنی میباشد.»

بنا به تعریف تابع خطی، چون پاسخ حالت صفر ، یک تابع جمع‌پذیر وهمگن تحریک ورودی‌است ، پس یک «تابع خطی» تحریک‌ورودی‌میباشد ودرنتیجه گفته ما ثابت میشود.

«اپراتور $\mathcal{Z}_{t_0}$» . میتوان خطی بودن پاسخ حالت صفر ، را بطور سمبلیک[1] با تعریف اپراتور[2] $\mathcal{Z}_{t_0}$ بیان کرد . برای مدار RC که درشکل (۱ - ٤) دیده می‌شود ، گیریم $\mathcal{Z}_{t_0}(i_s)$ نمایش «شکل موج» پاسخ حالت صفر مدار RC به ورودی شکل موج $i_s(\cdot)$ باشد . زیر نویس t_0 در $\mathcal{Z}_{t_0}$ نمایش آنستکه در زمان t_0 مدار RC درحالت صفر بوده و ورودی درلحظهٔ t_0 وارد شده است . پس معنای دقیق خطی بودن پاسخ حالت صفر چنین است :

۱- برای همه شکل موجهای ورودی $i_1(\cdot)$ و $i_2(\cdot)$ (که برای $t \geqslant t_0$ معین و برای $t < t_0$ متحد با صفر گرفته میشود) پاسخ حالت‌صفر برای ورودی $i_1(\cdot)+i_2(\cdot)$ برابر با مجموع پاسخ حالت صفر معلول ورودی $i_1(\cdot)$ تنها و پاسخ حالت صفر معلول ورودی $i_2(\cdot)$ تنها میباشد ، یعنی :

$$\mathcal{Z}_{t_0}(i_1+i_2)=\mathcal{Z}_{t_0}(i_1)+\mathcal{Z}_{t_0}(i_2) \qquad (٤-١٣)$$

۲- برای همه عددهای حقیقی α و برای همه شکل موجهای $i(\cdot)$ ، پاسخ حالت صفر معلول ورودی $\alpha i(\cdot)$ برابر است با α برابر پاسخ حالت صفر معلول ورودی $i(\cdot)$ ، یعنی :

$$\mathcal{Z}_{t_0}(\alpha i)=\alpha\,\mathcal{Z}_{t_0}(i) \qquad (٤-١٤)$$

تبصره ۱- اگرخازن‌ومقاومت شکل (۱-٤) خطی و «تغییرپذیر بازمان» باشند،

---

۱ — Symbolically ۲ — Operator

برای $t \geqslant t_0$ معادلهٔ دیفرانسیل چنین خواهد بود :

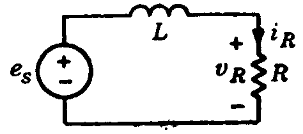
$$\frac{d}{dt}\left[C(t)\,v(t)\right]+G(t)\,v(t)=i_s(t) \qquad (٤-١٠)$$

پاسخ حالت صفر باز یک تابعی خطی تحریک ورودی میباشد . در واقع اثبات جمع‌پذیری و همگنی تنها مستلزم تغییر مختصر خواهد بود . این اثبات هنوز معتبر است زیرا :

$$\frac{d}{dt}\left[C(t)\,v_1(t)\right]+\frac{d}{dt}\left[C(t)\,v_2(t)\right]=\frac{d}{dt}\left\{C(t)\left[v_1(t)+v_2(t)\right]\right\}$$

تبصره ۲- حقیقت زیرکه ما آنرا تنها برای‌حالت خاص ثابت کردیم درحالت کلی نیز برقرار است . مدار دلخواهی راکه شامل عنصرهای خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر بازمان) است درنظر میگیریم و فرض میکنیم که این مدار تنها بوسیلهٔ یک منبع نابسته تحریک شود و جریان یا ولتاژ یک شاخه دلخواه آن پاسخ موردنظر باشد. بدینسان پاسخ حالت صفر یک تابع خطی تحریک ورودی است. اثبات این نتیجه به تجزیه و تحلیل کلی شبکه‌ها وابسته‌است (که درفصل ششم خواهیم‌دید) . مثلاً مدارخطی RL که درشکل (٤-٢) نشان‌داده شده وتحریک ورودی آن منبع ولتاژ e_s و پاسخ آن جریان i_R است‌دارای این خاصیت میباشدکه پاسخ حالت‌صفرآن $i_R(0)$ یک تابع خطی تحریک ورودی $e_s(0)$ میباشد .

تبصره ۳- از اثبات مدار ساده خطی RC که در بالا دیدیم بآسانی معلوم میشود که « پاسخ کامل » یک تابع خطی تحریک ورودی « نیست » (مگراینکه مدار ازحالت صفر شروع نماید). اکنون بااثبات‌این‌موضوع بازگشته ملاحظه میکنیم که‌اگرمدار درحالت اولیه $V_0 \neq 0$ باشد ، یعنی درمعادلهٔ (٤-٢) ، $v_1(t_0)=V_0$ و درمعادلهٔ (٤-٤) ، $v_2(t_0)=V_0$ باشددراینصورت‌درمعادلهٔ(٤-٦) ، $[v_1(t_0)+v_2(t_0)]=2V_0$ خواهد بود



شکل۲-٤- مدارخطی RL باورودی e_s و پاسخ i_R

که برابر ولتاژ اولیه نمی‌باشد. این نتیجه باردیگر این نکته مهم را تأییدمی‌کندکه رابطهٔ ورودی وپاسخ یک مدار، بوسیله شرطهای اولیه توأم بامعادله دیفرانسیل مشخص‌میشود. ما درفصل ششم نشان خواهیم دادکه پاسخ کامل هرمدار خطی‌را میتوان صریحاً برحسب شکل موج ورودی وپاسخ ورودی صفر نوشت‌که درآن، عبارت اخیر تنها به شرطهای اولیه مدار بستگی دارد .

تمرین- منظور ازاین تمرین‌آنستکه نشان دهیم اگر مداری شامل عناصر غیرخطی باشد پاسخ حالت صفر آن لزوماً یک تابع خطی تحریک ورودی نخواهد بود . بدین‌منظور مدار شکل (۲-٤) را درنظرگرفته وگیریم مقاومت‌آن غیرخطی بوده و مشخصه‌اش بصورت

$$v_R = a_1 i_R + a_2 i_R^2$$

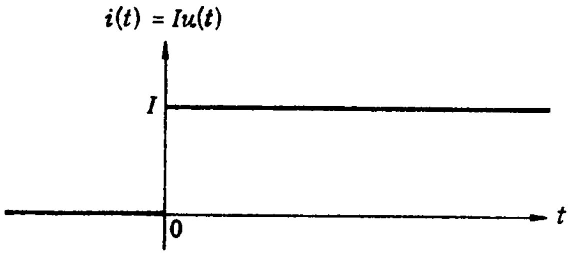
باشدکه درآن a_1 و a_2 ثابت‌های‌مثبتی‌هستند. نشان دهیدکه اپراتور $\mathcal{Z}_{t_0}$ دارای‌خاصیت جمع‌پذیری نیست .

۵- خطی بودن و تغییر ناپذیری بازمان

ما درفصل‌دوم ، عناصر مدار را برحسب خطی یاغیرخطی‌بودن، تغییرپذیری یا تغییر ناپذیری بازمان رده بندی نمودیم و دربخش پیش برای یک حالت ساده نشان دادیم که برای مدارهای خطی ، پاسخ حالت صفر ، یک تابع خطی تحریک ورودی است وگفتیم‌که این نتیجه برای مدارهای تغییرپذیر وتغییرناپذیر بازمان، هردو ، برقرار است. دراین‌بخش ما تفاوت میان پاسخهای یک مدار باعناصر تغییرناپذیر بازمان و مدار با عناصر تغییرپذیر با زمان را بررسی خواهیم‌کرد . این مطالعه از لحاظ درك اهمیت « تغییرناپذیری بازمان » برای ما بسیار سودمند خواهد بود .

۱-۵- پاسخ پله

تا اینجا ما هروقت منبع نابسته‌ای‌را به مداری‌وصل کردیم‌کلیدی بکار بردیم تانشان دهیم که دریک زمان‌معین $t=0$ ، کلید باز یا بسته شده و ورودی درمدار شروع به عمل مینماید . میتوان با بکار بردن یک تابع پله راه دیگری برای توصیف عمل وارد نمودن یک ورودی ، که در زمان‌معینی مانند $t=0$ شروع می‌شود ، عرضه نمود . مثلاً میتوان

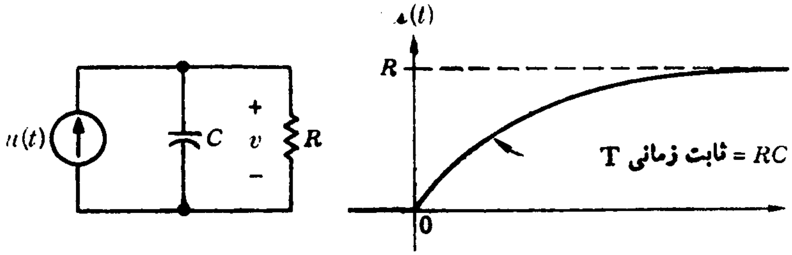


شکل ۱-۵- تابع پله با اندازهٔ I

یک منبع جریان ثابت را که درلحظهٔ $t=o$ وارد مدار میشود توسط منبع جریانی که بطور همیشگی به مدار وصل شده است (بدون کلید) و مطابق شکل (۱-۵) دارای شکل موج تابع پله میباشد نمایش‌داد. بنابراین برای $t<o$ ، $i(t)=o$ ،برای $t>o$ ، $i(t)=I$ و در $t=o$ جریان از صفر به I می‌جهد .

پاسخ حالت صفر یک‌مدار به‌ورودی پله واحد $u(\cdot)$ ، **پاسخ پله** نامیده شده و با s نشان داده میشود . بعبارت دقیقتر ، $s(t)$ پاسخ مدار درلحظهٔ t است بشرطیکه :

(۱) ورودی آن تابع پله واحد $u(\cdot)$ باشد . (۲) درست قبل از وارد کردن ورودی پله واحد، مدار درحالت صفر باشد . همانطوریکه قبلاً گفته شد ، ما قرار داد $s(t)=o$ برای $t<o$ را می‌پذیریم . برای مدار RC خطی تغییرناپذیر با زمان شکل (۲-۵) ، پاسخ پله برای همه t عبارتست از :



شکل ۲-۵- پاسخ پله یک مدار ساده RC

$u(t) \leqslant 0 \quad t \leqslant 0$

$u(t)=1 \quad t>0$

$$\boxed{s(t)=u(t)R\left(1-e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right)} \qquad \text{تمام} \quad (۵-۱)$$

توجه کنید که وجود $u(t)$ درمعادلهٔ (۱-۵) ، نشان دادن این را که نتیجه فوق ، مانند حالات قبل ، فقط برای $t \geqslant 0$ درست است غیرضروری میسازد .

۵-۲- خاصیت تغییر ناپذیری بازمان

دراینجا منظور ما تمرکز روی یک خاصیت اصلی مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان است. ابتدا با یک بحث حسی شروع کرده سپس به توصیف رسمی[۱] خاصیت تغییرناپذیری با زمان میپردازیم .

یک مدار دلخواه خطی تغییرناپذیر بازمان که با یک منبع نابسته تنها تحریک شده است را درنظر گرفته و یکی از متغیرهای شبکه را بعنوان پاسخ انتخاب کنید . مثلاً ممکن است که مدار RC موازی که قبلاً درنظرگرفته شده است را بکار برد . گیریم که ولتاژ v_0 پاسخ حالت صفر مدار به‌ورودی منبع جریان i_0 که درلحظهٔ $t=0$ شروع میشود باشد. برحسب اپراتور $\mathcal{Z}_0$ داریم :

$$v_0 \triangleq \mathcal{Z}_0(i_0) \qquad (۲-۵ \text{ الف})$$

زیرنویس 0 اپراتور $\mathcal{Z}_0$ مخصوصاً نشان میدهد که لحظهٔ شروع، $t=0$ میباشد. بنابراین v_0 جواب منحصر بفرد معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

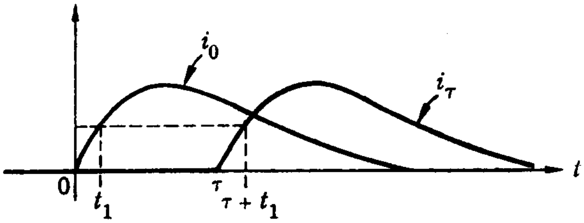
$$C\frac{dv_0}{dt}+Gv_0=i_0(t) \qquad t \geqslant 0 \qquad (۲-۵ \text{ ب})$$

با شرط

$$v_0(0)=0 \qquad (۲-۵ \text{ پ})$$

درحل (۲-۵ ب) و (۲-۵ پ) ما فقط به $t \geqslant 0$ علاقمندیم . با قرارداد قبلی فرض میکنم که برای $t<0$ ، $i_0(t)=0$ و $v_0(t)=0$ باشد . حال فرض کنید که بدون تغییر دادن فرم شکل موج $i_0(\cdot)$ آنرا بطور افقی انتقال دهیم تا اینکه در زمان τ

۱ — Formal



شکل ۳-۵- شکل موج i_τ نتیجه انتقال شکل موج i_0 بمقدار τ ثانیه است

شروع کند ، $\tau \geqslant 0$ (به شکل (۳-۵) مراجعه شود) . منحنی‌حاصل ، تابع جدید $i_\tau(\cdot)$ را تعریف میکندکه زیرنویس τ نشان دهندهٔ زمان شروع جدید است. از روی منحنی‌واضح است که عرض i_τ در زمان $\tau+t_1$ برابر عرض i_0 در زمان t_1 میباشد وچون t_1 اختیاری است بنابراین :

$$i_\tau(\tau+t_1)=i_0(t_1) \qquad \text{برای همه } t_1$$

و اگر $t=\tau+t_1$ قرار دهیم بدست می‌آوریم :

$$i_\tau(t)=\begin{cases} i_0(t-\tau) & t \geqslant \tau \\ 0 & t<\tau \end{cases} \qquad (۵-۳)$$

حال v_τ ، پاسخ مدار RC به‌ورودی i_τ را درنظر گیرید ، با فرض اینکه در زمان صفر ، مداردرحالت‌صفر است ، داریم :

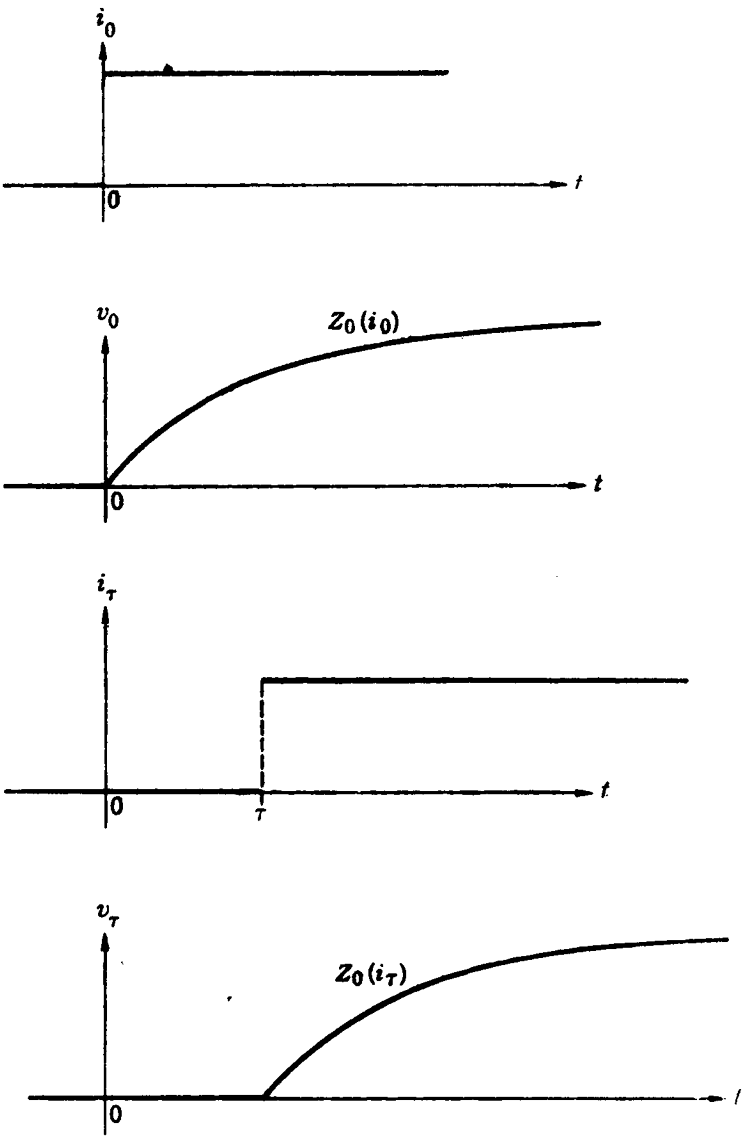
$$v_\tau \triangleq \mathcal{Z}_0(i_\tau) \qquad (\text{الف } ۵-۴)$$

بعبارت دقیقتر ، v_τ پاسخ منحصر بفرد معادلهٔ زیر است :

$$C\frac{d}{dt}v_\tau(t)+Gv_\tau(t)=i_\tau(t) \qquad t \geqslant 0 \qquad (\text{ب } ۵-۴)$$

با شرط

$$v_\tau(0)=0 \qquad (\text{پ } ۵-۴)$$



شکل ۴-۵- تشریح خاصیت تغییرناپذیری بازمان

بطور حسی، ما انتظار داریم که شکل موج v_τ همان شکل‌موج v_0 باشد که بمقدار τ انتقال داده شده است. در واقع چون مدار تغییرناپذیر با زمان است پاسخ آن به i_τ که در زمان τ وارد شده است، بجز یک انتقال زمانی، برابر پاسخ آن به i_0 که در زمان $t=0$ وارد شده است خواهد بود. این حقیقت درشکل (۴ - ۵) نشان داده شده است.

برای دانشجویانیکه علاقمند به استدلال مشروح باشند. اثبات زیر را در دومرحله بیان میکنیم:

۱- v_τ درفاصلهٔ $(0, \tau)$ بطور متحد مساوی‌صفراست، در واقع $v_\tau \equiv 0$، برای $0 \leqslant t \leqslant \tau$ درمعادلهٔ (۴ - ۵ ب) (بعلت اینکه دراین فاصله $i_\tau \equiv 0$) و در شرط اولیهٔ (۴ - ۵ پ) صدق‌میکند. چون درفاصله $0 \leqslant t \leqslant \tau$، $v_\tau \equiv 0$ است‌ازاینجا نتیجه می‌شود:

$$v_\tau(\tau) = 0 \qquad (۵ — ۵)$$

۲- حال v_τ را برای $t \geqslant \tau$ باید تعیین نمود. برای‌این کار معادلهٔ (۵-۵) را بعنوان شرط اولیه بکار برده و اظهار میکنیم که شکل موج حاصل از انتقال v_0 بمقدار τ برای $t \geqslant \tau$ درمعادلات(۴ - ۵ ب) و (۵ - ۵) صدق‌میکند. برای‌اثبات این‌مطلب تحقیق‌میکنیم تابع y که بصورت $y(t) \triangleq v_0(t-\tau)$ تعریف میشود، برای $t \geqslant \tau$ درمعادله دیفرانسیل (۴ - ۵ ب) وشرط اولیه (۵-۵) صدق میکند.

با عوض کردن t با $t-\tau$ درمعادلهٔ (۲ - ۵ ب) بدست می‌آوریم که:

$$C\frac{d}{dt}[v_0(t-\tau)] + Gv_0(t-\tau) = i_0(t-\tau) = i_\tau(t) \qquad t \geqslant \tau \qquad (\text{الف } ۵ — ۶)$$

و یا طبق تعریف:

$$C\frac{d}{dt}[y(t)] + Gy(t) = i_\tau(t) \qquad t \geqslant \tau \qquad (\text{ب } ۵ — ۶)$$

که دقیقاً همان معادلهٔ (۴-۵ ب) برای $t \geqslant \tau$ میباشد. واضح است که شرایط اولیه نیز برقرار است زیرا:

$$y(\tau) \triangleq v_0(t-\tau)\Big|_{t=\tau} = v_0(0) = 0$$

بعبارت دیگر تابع $y(t) \triangleq v_0(t-\tau)$ برای $t \geqslant \tau$ درمعادلهٔ دیفرانسیل (٤ ـ ٥ ب) و شرط اولیه (٥ ـ ٥) صدق میکند . این حقیقت ، توأم با $v_\tau \equiv 0$ درفاصلهٔ $[0 , \tau)$ لازم‌میدارد که « شکل‌موج v_0 که بمقدار τ تغییرمکان‌داده باشد برابر $\mathcal{Z}_0(i_\tau)$ » ، یعنی پاسخ حالت صفر به‌ورودی i_τ ، می‌باشد .

مثال- اگر $i_0(t)=Iu(t)$ باشد دراین‌صورت :

$$v_0(t)=u(t)\,RI\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad \text{برای همه } t$$

و پاسخ حالت صفر برای $i_\tau(t)=i_0(t-\tau)=Iu(t-\tau)$ مساوی است با :

$$v_\tau(t)=u(t-\tau)RI\left(1-e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}\right) \qquad \text{برای همه } t$$

تبصره ۱- استدلال گفته شده دربالا به‌مقدارخاص $\tau \geqslant 0$ وبه‌فرم شکل‌موج‌ورودی i_0 بستگی ندارد . بعبارت دیگر برای همه $\tau \geqslant 0$ و همه i_0 ، $\mathcal{Z}_0(i_\tau)$ عیناً مساوی $\mathcal{Z}_0(i_0)$ است‌که بمقدار τ انتقال داده شده است. این حقیقت را « خاصیت تغییرناپذیری بازمان » مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RC نامند .

تبصره ۲- مشاهده این موضوع بسیارحائزاهمیت است‌که، دربحث اینکه معادلهٔ (٦ ـ ٥) در واقع همان معادلهٔ (٢ ـ ٥ ب) است‌که درآن $t-\tau$ بجای t جایگزین شده بود ، از ثابت بودن مقادیر C و G استفاده‌کردیم .

۳-۵- اپراتور انتقال

میتوان مفهوم تغییرناپذیری با زمان را با بکار بردن « اپراتور انتقال » دقیقاً بیان نمود . گیریم‌که $f(\cdot)$ شکل موج دلخواهی باشدکه برای همه t تعریف شده است و T_τ اپراتوری باشدکه وقتی روی f عمل‌میکند شکل‌موجی یکسان ولی‌انتقال یافته بمقدار

۱ — Translation

τ بوجودمی‌آورد. شکل‌موج انتقال یافته را $f_\tau(\cdot)$ نامیده و عرضهای آن بوسیله رابطه زیر داده میشوند :

$$f_\tau(t)=f(t-\tau) \qquad \text{برای همه } t$$

بعبارت دیگر، نتیجه بکار بردن اپراتور T_τ روی شکل‌موج f ، شکل‌موج جدیدی است که با $T_\tau f$ نشان داده می‌شود ، بقسمی‌که درهرزمان t مقدار شکل‌موج جدید ، که با $(T_\tau f)(t)$ نشان داده می‌شود ، توسط رابطه زیر به مقادیر f مربوط میشود :

$$(T_\tau f)(t)=f(t-\tau) \qquad \text{برای همه } t$$

درطرزنمایش بحث‌قبلی‌داشتیم $f_\tau=T_\tau f$. اپراتور T_τ را **اپراتورانتقال**[1] نامند. حقیقت اینکه اپراتور انتقال یک اپراتور خطی است بسیار حائز اهمیت است. در واقع این اپراتور دارای خاصیت جمع‌پذیری است و بنابراین :

$$T_\tau(f+g)=T_\tau f+T_\tau g$$

یعنی نتیجه انتقال $f+g$ مساوی مجموع انتقال یافته f وانتقال یافته g است . این اپراتور همگن نیز میباشد . اگر α یک عدد حقیقی دلخواه و f یک شکل موج اختیاری باشد :

$$T_\tau[\alpha f]=\alpha T_\tau f$$

یعنی اگر شکل موج f را درعدد α ضرب کرده نتیجه را انتقال دهیم ، همان شکل موجی را بدست می‌آوریم که ابتدا f را انتقال داده سپس آنرا در α ضرب کنیم .

حال اپراتور انتقال را برای بیان خاصیت تغییرناپذیری با زمان بکار میبریم . مانند قبل ، گیریم $\mathcal{Z}_0(i_0)$ پاسخ‌مداری‌که در زمان صفر درحالت صفراست به‌ورودی i_0 باشد . قبلاً $v_0(t)$ برای نشان دادن مقدار پاسخ حالت صفر در زمان t بکار رفته بود [بمعادلهٔ (۲ ـ ٥ الف) مراجعه شود] . دلیل اینکه حالا $\mathcal{Z}_0(i_0)$ بکار میرود تأکیدوابستگی پاسخ حالت صفر به تمامی شکل‌موج‌ورودی $i_0(\cdot)$ وهمچنین تأکید زمانی‌است‌که مدار درحالت صفر میباشد . بخاطر نگهداشتن اینکه $\mathcal{Z}_0(i_0)$ تمامی شکل موج است نه فقط مقدار آن در زمان t ، حائز اهمیت است. با این‌طرز نمایش میتوان خاصیت تغییرناپذیری بازمان

---

۱ — Shift Operator

را که دربالا نشان داده شد بصورت زیر نوشت :

برای همه‌ورودی‌های i_0 و همه $\tau \geqslant 0$ $\qquad T_\tau[\mathcal{Z}_0(i_0)] = \mathcal{Z}_0[T_\tau i_0]$ $\qquad$ (۷ — ٥)

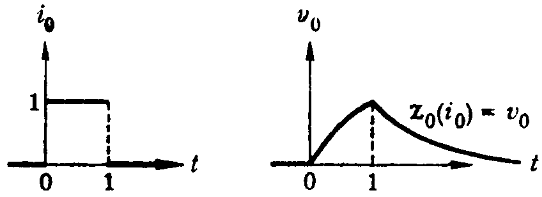
گرچه رابطه(۷-٥) را فقط برای یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان که شامل یک‌مقاومت و خازن موازی است ثابت کردیم ، این مطلب ، درواقع ، درمورد « هر » مدار خطی تغییرناپذیر با زمان و برای « هر » ورودی i و « هر » مقدار $\tau \geqslant 0$ معتبر است. معادله (۷ - ٥) خاصیت تغییرناپذیری با زمان مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان را بیان میدارد. این رابطه در بدست آوردن نمایش کانولوشن(۱) پاسخ حالت صفر درفصل ششم نقش اساسی خواهد داشت .

تبصره- میتوان خاصیت تغییرناپذیری با زمان را که در رابطهٔ (۷ - ٥) بیان شد بدین‌ترتیب تعبیر نمود که اپراتورهای T_τ و $\mathcal{Z}_0$ « جابجایی پذیرند »(۲)، یعنی ترتیب اثر دادن دو عامل هیچ تفاوتی نمی‌کند . گرچه شما عملیات زیادی که جابجایی پذیرند دیده‌اید (جمع اعداد حقیقی ، جمع ماتریس ها وغیره) ، عملهای زیادی هم وجود دارند که جا بجایی پذیر نیستند (مثلاً ضرب ماتریسهای $n \times n$) . این حقیقت که برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان اپراتورهای T_τ و $\mathcal{Z}_0$ جابجایی‌پذیرند بسیار قابل ملاحظه‌است، زیرا در بسیاری از موارد اگر ترتیب دوعمل باهم تعویض شود نتایج حاصل بطور فاحشی متفاوت میگردد. مثلاً اگر (۱) هفت‌تیری را پرکرده و (۲) آنرا نزدیک شقیقه خود قرار داده و ماشهٔ آنرا بکشیم، نتیجه حاصل از نتیجهٔ آنکه عمل (۲) را قبل‌ازعمل (۱) انجام دهیم بطورفاحشی متفاوت خواهد بود !

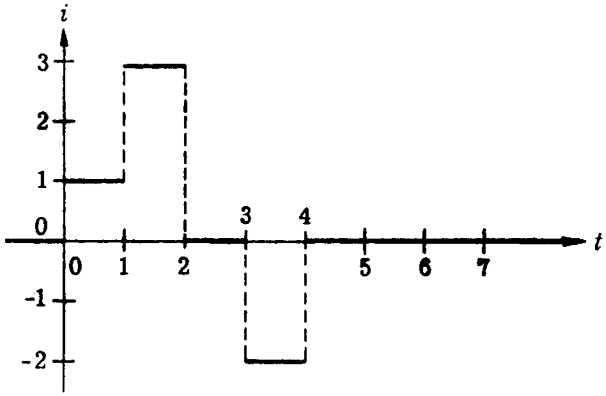
مثال- برای تشریح نتیجه خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان مثالی بیان میکنیم. مدار خطی تغییرناپذیر با زمان دلخواهی را درنظرگرفته فرض کنید که پاسخ حالت صفر v_0 به پالس ورودی i_0 را مطابق شکل (٥ - ٥) اندازه‌گیری نموده و شکل موج v_0 را ثبت کرده‌ایم . با بکاربردن طرز نمایش قبلی این بدین معنی است که $v_0 = \mathcal{Z}_0(i_0)$. مسأله ، تعیین پاسخ حالت صفر v به‌ورودی i نشان داده شده درشکل (٦-٥) میباشد که که درآن :

---

۱ — Convolution $\qquad$ ۲ — Commutative



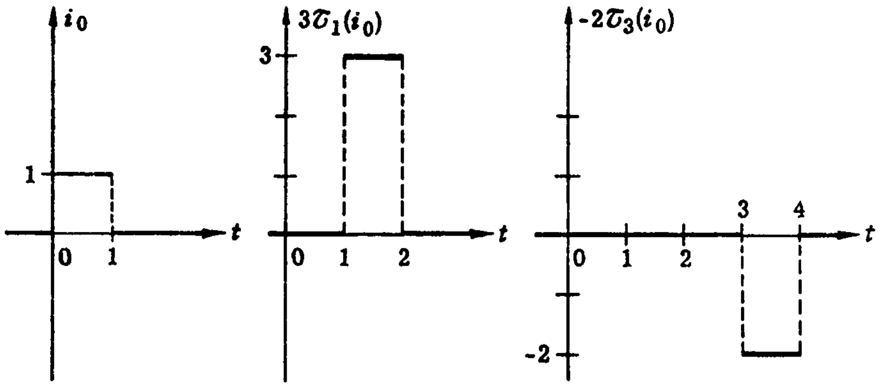
شکل ۵-۵- جریان i_0 و پاسخ حالت صفر v_0 متناظر باآن



شکل۶-۵- ورودی $i(t)$

$$i(t)=\begin{cases} ۱ & \text{برای } 0<t\leqslant ۱ \\ ۳ & \text{برای } ۱<t\leqslant ۲ \\ 0 & \text{برای } ۲<t\leqslant ۳ \\ -۲ & \text{برای } ۳<t\leqslant ۴ \\ 0 & \text{برای } ۴<t \end{cases}$$

مشاهده قابل توجه اینستکه ورودی داده شده را میتوان بصورت ترکیب خطی i_0 ومضربهایی از i_0 که بطور زمانی انتقال یافته‌اند نمایش داد. این عمل درشکل (۷ - ۵) نشان داده شده است. مجموع سه تابع نشان داده شده مساوی i است. از منحنی‌های i و i_0 واضح است که :



شکل ۷-۵- تجزیه i برحسب پالسهای انتقال یافته

$$i=i_0+۳T_۱(i_0)-۲T_۳(i_0)$$

پاسخ حالت صفر دراثر ورودی i را v نامیده و داریم :

$$v=\mathcal{Z}_0(i)$$
$$=\mathcal{Z}_0[i_0+۳T_۱(i_0)-۲T_۳(i_0)]$$

ازخطی بودن پاسخ حالت صفر بدست می‌آوریم که :

$$v=\mathcal{Z}_0(i_0)+۳\mathcal{Z}_0[T_۱(i_0)]-۲\mathcal{Z}_0[T_۳(i_0)]$$

و از خاصیت تغییرناپذیری با زمان داریم :

$$v=\mathcal{Z}_0(i_0)+۳T_۱[\mathcal{Z}_0(i_0)]-۲T_۳[\mathcal{Z}_0(i_0)]$$

و چون $v_0=\mathcal{Z}_0(i_0)$ پس داریم :

$$v=v_0+۳T_۱[v_0]-۲T_۳[v_0]$$

و یا :

$$v(t)=v_0(t)+۳v_0(t-۱)-۲v_0(t-۳) \qquad \text{برای } t\geqslant 0$$

تبصره- روشی که برای محاسبهٔ v برحسب v_0 بکار رفت معمولاً به روش «اصل جمع آثار[1]» معروف است . توجه به این مطلب بسیار اهمیت دارد که ما باید ازخاصیت تغییرناپذیری با زمان و این حقیقت که پاسخ حالت صفر یک « تابع خطی » ورودی است کمک بگیریم .

تمرین- مدار آشنای خطی تغییرناپذیر با زمان RC نشان داده شده درشکل (۸ ـ ۵ الف) که درآن i_s ورودی و v پاسخ میباشد را درنظر گیرید .

الف : پاسخ حالت صفر به ورودی‌های زیر را محاسبه و رسم کنید :

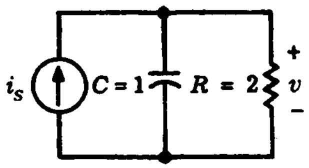
$$i_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{برای} \quad 0 < t \leqslant 0.5 \\ 0 & \text{برای} \quad 0.5 < t \end{cases}$$

$$i_2(t) = \begin{cases} 2 & \text{برای} \quad 0 < t \leqslant 0.5 \\ 0 & \text{برای} \quad 0.5 < t \leqslant 2 \\ -0.5 & \text{برای} \quad 2 < t \leqslant 2.5 \\ 0 & \text{برای} \quad 2.5 < t \end{cases}$$

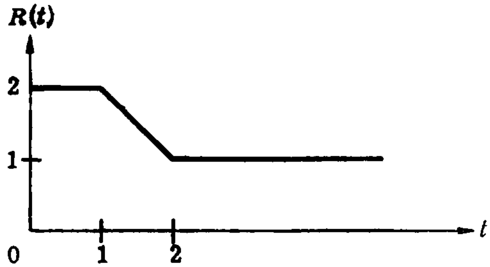
ب : حال فرض کنید که مقاومت تغییرپذیر بازمان ولی هنوز خطی باشد و مقاومت آن بصورت تابعی از زمان مطابق شکل (۸ ـ ۵ ب) باشد . فرض کنید که بخواهیم پاسخ این مدار را به ورودی i_2 حساب کنیم ، آیا هنوز میتوان روش بحث قبلی را بکار برد ؟ اگر جواب منفی است دلیلش را بطور خلاصه ذکر کنید .

---

۱ — Principle of Superposition



(الف)



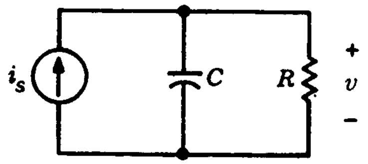
(ب)

شکل ۸-۵- (الف) یک مدار خطی ساده RC
(ب) مشخصه مقاومت تغییرپذیر
بازمان

۶- پاسخ ضربه

پاسخ حالت صفر یک مدار تغییرناپذیر بازمان را بیک ضربه «واحد» که در $t=0$ وارد شده‌است **پاسخ ضربه** مدارگفته با h نشان‌میدهند. بعبارت‌دقیقتر، $h(t)$ پاسخ مدار درزمان t است بشرطیکه (۱) ورودی آن‌ضربه واحد δ باشد و (۲) درست قبل از وارد نمودن ضربه، مدار در «حالت صفر» باشد. برای راحتی‌فرمولهای بعدی h را برای $t<0$ مساوی صفرتعریف می‌کنیم. ازآنجائیکه محاسبهٔ پاسخ ضربه برای‌مهندسین برق‌اهمیت بسیار زیادی دارد، سه روش برای محاسبهٔ آن ارائه خواهد شد.

« روش اول » دراینجا با تقریب، تابع پالس p_Δ را جایگزین تابع ضربه می‌نمائیم. برای بدست آوردن آشنایی اولیه با پاسخ ضربه، پاسخ ضربه مدار RC موازی نشان داده شده درشکل (۱-۶) را محاسبه می‌کنیم. ورودی مدار منبع جریان i_s، و پاسخ، ولتاژ خروجی v میباشد. چون، بنا به تعریف، پاسخ ضربه پاسخ حالت صفر به ورودی δ میباشد، پس پاسخ ضربه جواب معادله دیفرانسیل زیر است :



شکل ۱-٦- مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RC

$$C\frac{dv}{dt}+Gv=\delta(t) \qquad (٦-١)$$

با شرط

$$v(0-)=0 \qquad (٦-٢)$$

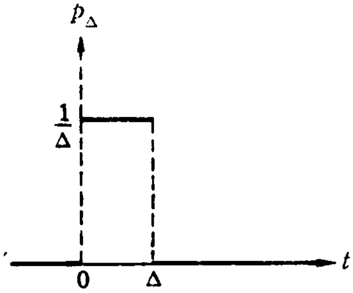
که درآن علامت $0-$ درست لحظهٔ قبل از $t=0$ را نشان میدهد .

بعلت وجود تابع ضربه درسمت راست معادله(۱ - ٦) لازم‌است‌که بین $0-$ و $0+$ تمایزی قائل شد . درلحظهٔ $t=0$ ، جریان بی‌نهایت زیادی در فاصلهٔ زمانی بی‌نهایت کوچکی وارد مدار میشود . این وضعیت، مشابه توپ گلفی است‌که در روی زدن‌گاه قرار گرفته است ودرلحظهٔ $t=0$ بوسیلهٔ چوگان زده میشود. واضح است‌که تمیزدادن سرعت توپ درلحظهٔ $0-$ ، یعنی درست قبل‌ازاینکه توپ زده شود ، از سرعت‌آن درلحظهٔ $0+$ ، یعنی درست بعدازاینکه توپ زده میشود ، اهمیت بسیار زیادی دارد .

معادلهٔ(۲ - ٦) بیان میداردکه مدار، درست قبل از واردکردن ورودی ، درحالت صفر است . درحل معادلهٔ(۱ - ٦) ، باشکلاتی مواجه میشویم ، زیرا وقتی دقیقترصحبت کنیم δ یک تابع ریاضی « نیست » . ازاینرو ، جواب را باجایگزین نمودن تقریبی ضربه واحد δ با تابع پالس p_Δ و محاسبهٔ جواب حاصل و میل دادن $\Delta \to 0$ بدست خواهیم آورد . بخاطر بیاوریدکه p_Δ بصورت زیر تعریف شده است :

$$p_\Delta(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \quad \text{برای} \\ \dfrac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \quad \text{برای} \\ 0 & \Delta<t \quad \text{برای} \end{cases}$$

و درشکل (۲ - ٦) رسم شده‌است. قدم اول بدست‌آوردن h_Δ ، یعنی پاسخ حالت صفرمدار



شکل ۲-۶- تابع پالس $p_\Delta(\cdot)$

RC به‌ورودی p_Δ میباشد که درآن Δ خیلی کوچکتر از ثابت زمانی RC انتخاب میشود . شکل موج h_Δ جواب معادله دیفرانسیل زیر است :

$$C\frac{dh_\Delta}{dt}+\frac{۱}{R}h_\Delta=\frac{۱}{\Delta} \qquad o<t<\Delta \qquad \text{(۳ — ۶ الف)}$$

$$C\frac{dh_\Delta}{dt}+\frac{۱}{R}h_\Delta=o \qquad t>\Delta \qquad \text{(۳ — ۶ ب)}$$

با شرط $h_\Delta(o)=o$. واضح است که $\frac{۱}{\Delta}$ مقدار ثابتی میباشد وبنابراین از (۳ - ۶ الف) داریم :

$$h_\Delta(t)=\frac{R}{\Delta}(۱-e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad o<t<\Delta \qquad \text{(۴ — ۶ الف)}$$

و این پاسخ حالت صفر به ورودی پلهٔ $\frac{۱}{\Delta}u(t)$ میباشد . از (۳ - ۶ ب) ، برای $t>\Delta$ ، h_Δ پاسخ ورودی‌صفراست که در $t=\Delta$ از $h_\Delta(\Delta)$ شروع میکند. بنابراین:

$$h_\Delta(t)=h_\Delta(\Delta)\,e^{-\frac{t-\Delta}{RC}} \qquad t>\Delta \qquad \text{(۴ — ۶ ب)}$$

پاسخ کامل h_Δ از روی(۴ - ۶ الف) و (۴ - ۶ ب) درشکل(۳ - ۶ الف) نشان داده شده است . از (۴ - ۶ الف) داریم :

$$h_\Delta(\Delta)=\frac{R}{\Delta}(۱-e^{-\frac{\Delta}{RC}})$$

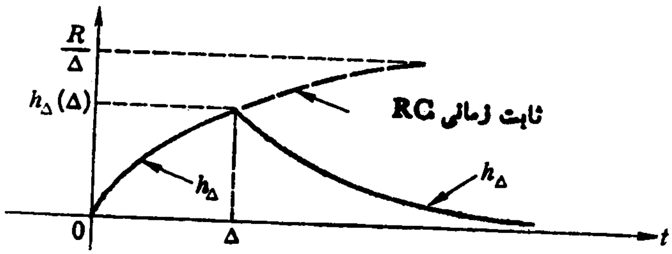
و چون Δ خیلی کوچکتر از RC میباشد ، با بکار بردن بسط :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

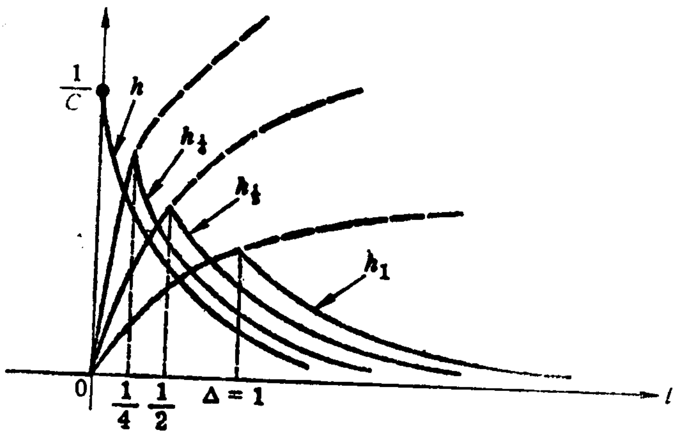
بدست می‌آوریم :

$$h_\Delta(\Delta) = \frac{R}{\Delta}\left[\frac{\Delta}{RC} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta}{RC}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{C}\left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta}{RC}\right) + \cdots\right]$$



(الف)



(ب)

شکل ۳-۶- (الف) پاسخ حالت صفر p_Δ

(ب) پاسخها وقتیکه $\Delta \to 0$

بطریق‌مشابه، برای‌مقادیرخیلی کوچک Δ و $o<t<\Delta$ ، بابسط تابع‌نمایی‌در (٤-٦ الف) بدست می‌آید که :

$$h_\Delta(t) = \frac{1}{C}\,\frac{t}{\Delta} + \cdots \qquad o<t<\Delta$$

توجه کنید که شیب منحنی h_Δ درفاصلهٔ $(o\,,\,\Delta)$ برابر $\frac{1}{C\Delta}$ میباشد. وچون Δ کوچک است این شیب خیلی زیاد است. وقتیکه $\Delta \to o$ شیب منحنی h_Δ درفاصلهٔ $(o\,,\,\Delta)$ تند و تندتر گشته و $h_\Delta(\Delta) \to \frac{1}{C}$ ، و درحد ، h_Δ درلحظهٔ $t=o$ از صفر به $\frac{1}{C}$ می‌جهد . برای $t>o$ از (٤ - ٦ ب) بدست می‌آوریم که :

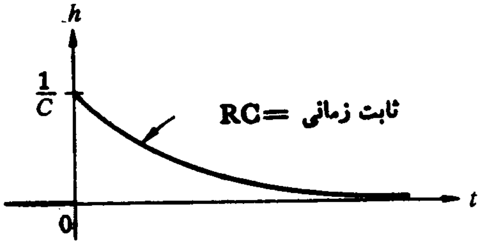
$$h_\Delta(t) \to \frac{1}{C}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

و وقتیکه Δ بسمت صفر میل میکند ، h_Δ مطابق شکل (٣ - ٦ ب) بسمت پاسخ ضربه h میل میکند . با بخاطر آوردن قرارداد اینکه برای $t<o$ ، $h(t)$ را مساوی صفر قرار میدهیم میتوان نوشت :

$$h(t)=u(t)\,\frac{1}{C}\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{برای همه } t \qquad (٦-٥)$$

پاسخ ضربه h درشکل (٤ - ٦) نشان داده شده است .

محاسبهٔ h بطریق بالا دو تبصره زیر را لازم میدارد :



شکل ٤-٦- پاسخ ضربه مدار RC شکل (١ - ٦)

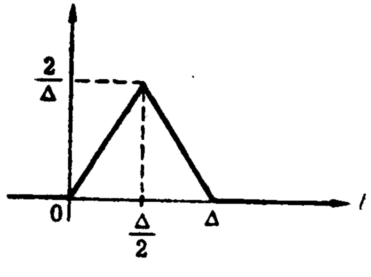
تبصره ۱- منظورما ازمحاسبهٔ پاسخ ضربه به‌طریق فوق، نشان‌دادن این حقیقت است که این روش، یک روش بسیار سرراستی میباشد که فقط احتیاج به جایگزین نمودن تقریبی δ با یک پالس مناسب، که دراینجا p_Δ است، دارد. تنها شرایطی که p_Δ باید درآنها صدق کند اینستکه دربیرون فاصلهٔ (Δ , o) مساوی صفر بوده و مساحت زیر p_Δ مساوی واحد باشد، یعنی :

$$\int_{0}^{\Delta} p_\Delta(t)\, dt = 1$$

واضح است که شکل p_Δ در بدست آوردن پاسخ هیچگونه اثری ندارد و بنابراین ما شکلی را انتخاب میکنیم که حداقل کار را لازم داشته باشد. البته می‌توانستیم پالس مثلثی نشان داده شده در شکل (۵ - ٦) را اختیار کنیم. توجه کنید که دامنه حداکثر پالس مثلثی دراینجا مساوی $\frac{2}{\Delta}$ میباشد. برقراری چنین شرطی برای اینکه مساحت زیر پالس برای همه $\Delta > o$ مساوی واحد باشد لازم است.

تبصره ۲- چون برای $t > o$ ، $\delta(t) = o$ است (یعنی برای $t > o$ ورودی بطور متحد برابر صفر است)، نتیجه می‌شود که برای $t > o$ پاسخ ضربه $h(t)$ همانند یک پاسخ ورودی صفر خاص میباشد. ما این موضوع را بعداً بکار خواهیم برد.

« رابطه بین پاسخ ضربه وپاسخ پله » حال میخواهیم یک رابطهٔ بسیار مهم میان پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان بدست‌آوریم، بعبارت دقیقتر، میخواهیم صحت مطلب زیر را نشان دهیم :



شکل ۵-٦- میتوان یک پالس مثلثی را نیز برای تقریب نمودن ضربه بکار برد.

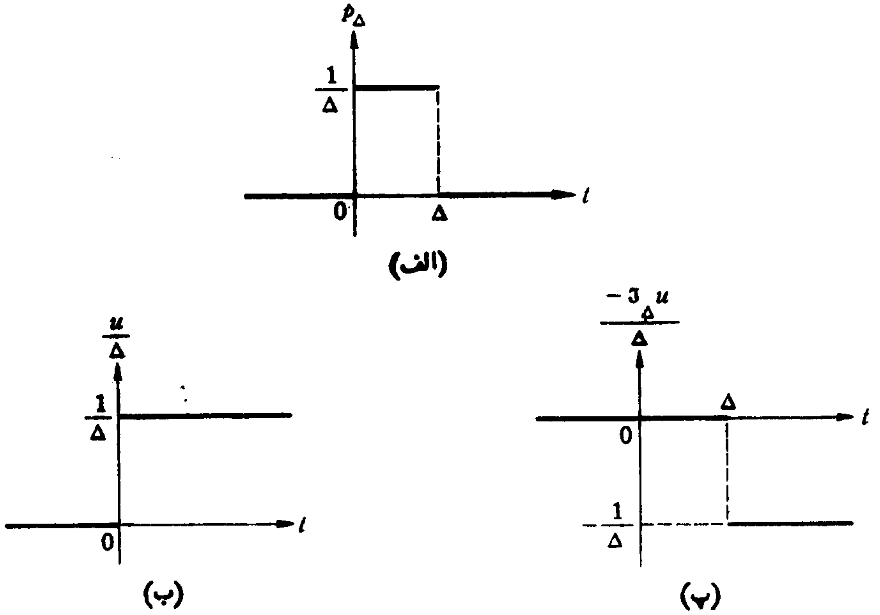
« پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مشتق زمانی پاسخ پلهٔ آن است » .
بطورسمبلیک :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t')\,dt' \qquad \text{یا بطورمعادل} \qquad h = \frac{ds}{dt} \qquad (۶-۶)$$

ما این عبارت مهم‌را با جایگزین نمودن‌تقریبی‌ضربه باتابع پالس p_Δ ثابت میکنیم. گیریم که h_Δ پاسخ حالت صفر به‌ورودی p_Δ باشد ، یعنی :

$$h_\Delta \triangleq \mathcal{Z}_0(p_\Delta)$$

وقتیکه $\Delta \to 0$ ، تابع پالس p_Δ بسمت‌ضربه واحد δ میل کرده و h_Δ ، پاسخ حالت‌صفر به ورودی پالس p_Δ ، بسمت پاسخ ضربه h میل می‌نماید . حال p_Δ را بصورت مجموع



شکل ۶-۶- تابع پالس p_Δ شکل (الف) را میتوان بعنوان مجموع تابع پله شکل (ب) و تابع پله تأخیردار شکل (پ) درنظر گرفت

یک تابع پله ویک تابع پله تأخیردار مطابق شکل (۶ - ۶) درنظر میگیریم . بنابراین:

$$p_\Delta = \frac{1}{\Delta}[u(t)-u(t-\Delta)] = \frac{1}{\Delta}u + \frac{-1}{\Delta}T_\Delta u$$

از خطی بودن پاسخ حالت صفر داریم :

$$\mathcal{Z}_0(p_\Delta) = \mathcal{Z}_0\left(\frac{1}{\Delta}u + \frac{-1}{\Delta}T_\Delta u\right) \tag{۶ - ۷}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\mathcal{Z}_0(u) + \frac{-1}{\Delta}\mathcal{Z}_0(T_\Delta u)$$

چون مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان است اپراتورهای $\mathcal{Z}_0$ و T_Δ جابجایی پذیرند و بنابراین :

$$\mathcal{Z}_0(T_\Delta u) = T_\Delta \mathcal{Z}_0(u) \tag{۶ - ۸}$$

گیریم که پاسخ پله را بصورت زیر نشان دهیم :

$$s \triangleq \mathcal{Z}_0(u)$$

میتوان معادلات (۷ - ۶) و (۸ - ۶) را با هم ترکیب نموده وبدست آورد که :

$$h_\Delta \triangleq \mathcal{Z}_0(p_\Delta) = \frac{1}{\Delta}s - \frac{1}{\Delta}T_\Delta s$$

و یا :

$$h_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}s(t) - \frac{1}{\Delta}s(t-\Delta)$$

$$= \frac{s(t)-s(t-\Delta)}{\Delta} \qquad \text{برای همه } t$$

حال وقتیکه $\Delta \to 0$ ، عبارت سمت راست بصورت مشتق درمی‌آید وبنابراین :

$$\lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(t) = h(t) = \frac{ds}{dt}$$

تبصره- دو معادلهٔ (۶ - ۶) برای مدارهای خطی « تغییرپذیر بازمان » معتبر نیست، و نباید هم چنین انتظاری داشت زیرا که تغییرناپذیری بازمان دریک مرحله اساسی از اثبات این معادلات بکار رفت . بنابراین ، برای مدارهای خطی « تغییرپذیر بازمان » مشتق زمانی پاسخ پله ، پاسخ ضربه را بدست «نمیدهد» .

« روش دوم » دراین روش $h = \frac{ds}{dt}$ را بکارمیبریم . مدار RC موازی شکل (۱-۶) را دوباره درنظر گرفته بخاطر آورید که s ، پاسخ پله آن بصورت زیر میباشد :

$$s(t) = u(t)\, R(1 - e^{-(\frac{1}{RC})t})$$

اگر ما سمت راست را بصورت حاصلضرب دوتابع درنظر گرفته و قاعده مشتق گیری :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

را بکار بریم پاسخ ضربه را بدست می‌آوریم :

$$h(t) = \delta(t)\, R(1 - e^{-(\frac{1}{RC})t}) + \frac{1}{C}\, u(t)\, e^{-(\frac{1}{RC})t}$$

جمله اول بطور متحد برابر صفر است ، زیرا برای $t \neq 0$ ، $\delta(t) = 0$ و برای $t = 0$ ،

$$1 - e^{-(\frac{1}{RC})t} = 0$$

است . و بنابراین داریم :

$$h(t) = \frac{1}{C}\, u(t)\, e^{-(\frac{1}{RC})t}$$

البته این نتیجه با نتیجهٔ بدست آمده قبلی (۵ - ۶) یکسان است .

« روش سوم » دراین روش مستقیماً معادله دیفرانسیل را بکار برده نشان میدهیم که تابع h که بصورت زیر تعریف میشود :

$$h(t) = \frac{1}{C} u(t)\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{برای همه } t$$

جواب معادله دیفرانسیل زیر است :

$$(٦-٩) \qquad C\frac{d}{dt}(v)+Gv=\delta \qquad v(o-)=o \qquad \text{با شرط}$$

برای اینکه تعصبی باین حالت نداشته باشیم جواب معادلهٔ (۹ - ٦) را y نامیده و نشان میدهیم که $y=h$ است. چون برای $t>o$ ، $\delta(t)=o$ میباشد و y جواب‌معادلهٔ (۹ - ٦) است ، باید داشته باشیم :

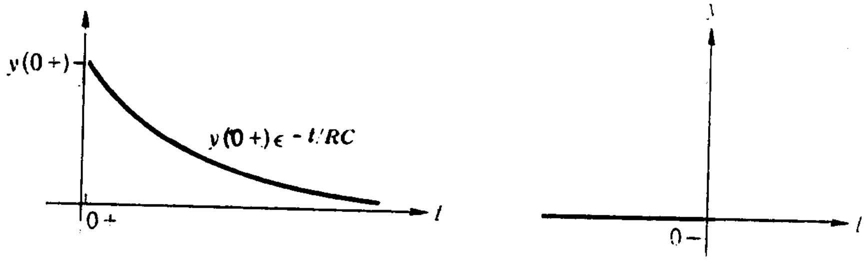
$$(٦-١٠) \qquad y(t)=y(o+)\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{برای } t>o$$

و این درشکل (۷ - ٦ الف) نشان داده شده است. همچنین چون برای $t<o$ ، $\delta(t)=o$ است و در زمان $-o$ مدار درحالت صفر میباشد ، باید داشته باشیم :

$$(٦-١١) \qquad y(t)=o \qquad \text{برای } t<o$$

و این درشکل (۷ - ٦ ب) نشان داده شده است . از ترکیب (۱۰-٦) و (۱۱-٦) نتیجه میگیریم که :

$$(٦-١٢) \qquad y(t)=u(t)\,y(o+)e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{برای همه } t$$



(الف) (ب)

شکل ۷-٦- پاسخ ضربه برای‌مدار RC موازی، (الف) - $y(t)$ برای $t>o$ (ب) - $y(t)$ برای $t<o$

حال باید $y(o+)$ ، یعنی مقدار جهش منحنی y در $t=o$ ، محاسبه گردد . در این محاسبه از مطلب معلوم زیر استفاده میکنیم :

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

با بکار بردن رابطهٔ (۱۲ - ۶) و درنظرگرفتن سمت راست آن بصورت حاصلضرب دو تابع بدست می‌آوریم که :

$$\frac{dy}{dt}(t)=\delta(t)\,y(o+)\,e^{-\frac{t}{RC}}+u(t)\,y(o+)\,\frac{-1}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

درجمله اول ، چون $\delta(t)$ درهمه جا بجز $t=o$ صفر است میتوان درجمله‌ای که در $\delta(t)$ ضرب میشود t را مساوی صفر قرار داد و بنابراین نوشت :

$$\frac{dy}{dt}(t)=\delta(t)\,y(o+)+u(t)\,y(o+)\,\frac{-1}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

با جایگزینی در (۹ - ۶) بدست می‌آوریم که :

$$\delta(t)\,Cy(o+)-u(t)\,y(o+)\,Ge^{-\frac{t}{RC}}+Gu(t)\,y(o+)e^{-\frac{t}{RC}}=\delta(t)$$

پس از حذف جملات مشابه ، تنها جمله‌ای کـه درسمت چپ باقی میماند مساوی است با $Cy(o+)\,\delta(t)$ ، وچون‌این‌جمله بایدباعبارت $\delta(t)$ سمت‌راست معادل باشد، بدست می‌آید که $y(o+)C=1$ ، بعبارت معادل :

$$y(o+)=\frac{1}{C}$$

با گذاشتن مقدار $y(o+)$ در (۱۲ - ۶) نتیجه میگیریم که جواب (۹ - ۶) در واقع همان h ، یعنی پاسخ ضربه که قبلاً محاسبه شده‌است میباشد.

تبصره- دربالا نشان دادیم که برای $t>0$ جواب معادله دیفرانسیل :

$$C\frac{d}{dt}(v)+Gv=\delta \qquad v(0-)=0 \qquad \text{با شرط}$$

با جواب معادله دیفرانسیل زیر یکسان است :

$$C\frac{d}{dt}(v)+Gv=0 \qquad v(0+)=\frac{1}{C} \qquad \text{با شرط} \qquad (۶-۱۳)$$

برای $t>0$. این موضوع را میتوان با انتگرال گیری دوطرف رابطهٔ (۹-۶) از $t=0-$ تا $t=0+$ مشاهده نموده و بدست آورد که :

$$Cv(0+)-Cv(0-)+G\int_{0-}^{0+}v(t')\,dt'=1$$

و چون v پایاندار[1] است :

$$G\int_{0-}^{0+}v(t')\,dt'=0$$

میباشد . همچنین چون $v(0-)=0$ ، پس از اینجا بدست میآوریم که :

$$v(0+)=\frac{1}{C}$$

درمعادلهٔ (۱۳ - ۶) اثر ضربه درزمان $t=0$ بادرنظرگرفتن شرط اولیه در زمان $t=0+$ منظور شده است .

۱ – Finite